

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الصف الثانى الثانوى القسم العلمى

منهج البحتة فرع الجبر

الدوال الحقيقية

الوحدة الأولى

رقم الدرس	اسم الدرس	الصفحة
١	الدوال الحقيقية	٢
٢	العمليات على الدوال – تركيب دالتين	١١
٣	بعض خواص الدوال	٢٢
٤	أطراف الدوال	٣١
٥	التمثيل البياني	٣٤
٦	حل معادلات و متباينات	٥١

الدرس الأول الدوال الحقيقية

يعني إيه دالة ؟

إذا كانت S ، V مجموعتين غير خاليتين فإن العلاقة من S إلى V تسمى دالة إذا ارتبط كل عنصر من S بعنصر واحد فقط من V .

متي تكون العلاقة دالة ؟

٣ من علاقة مكتوبة

إذا كان الأس بتاع V فردي تكون العلاقة دالة وإذا كان زوجي تكون العلاقة ليست دالة .

١ من بيان E

إذا ظهر كل عنصر من S كمسقط أول مرة واحدة فقط .

٤ من إختبار الخط الرأسي

إذا وجد خط رأسي (موازي لمحور الصادات) يقطع الشكل البياني في أكثر من نقطة فإن العلاقة لا تمثل دالة .

٢ من المخطط السهمي

إذا خرج من كل عنصر من S سهم واحد فقط إلى V .

٣ من علاقة مكتوبة

إذا كان الأس بتاع ص فردي تكون العلاقة دالة وإذا كان زوجي تكون العلاقة ليست دالة .

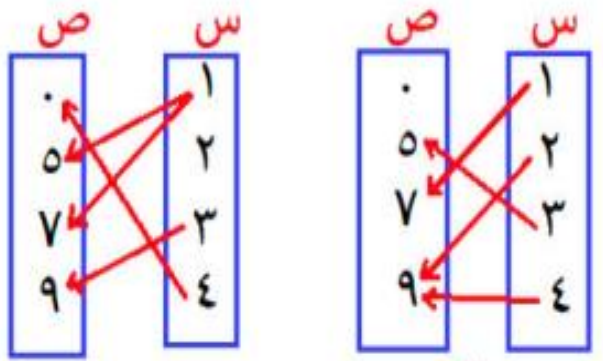
دالة

مثال: ٢

$$\begin{aligned} \text{ص} &= \text{س} + ١ \\ \text{ص}^٢ &= \text{س}^٢ + ٧ \\ \text{ص}^٥ &= ٣ \end{aligned}$$

٢ من المخطط السهمي

إذا خرج من كل عنصر من س سهم واحد فقط إلى ص.



ليست دالة

دالة

مثال: ٣

$$\begin{aligned} \text{ص}^٢ &= \text{س} - ٢ \\ \text{ص}^٤ &= \text{س}^٣ + ٥ \\ \text{ص}^٢ &= \text{س}^٣ - ٥ \end{aligned}$$

ليست دالة

المجال = { ٤ ، ٣ ، ٢ ، ١ }
 المجال المقابل = { ٩ ، ٧ ، ٥ ، ٠ }
 المدى = { ٩ ، ٧ ، ٥ } مجموعة صور عناصر المجال

١ من بيان ع

إذا ظهر كل عنصر من س كمسقط أول مرة واحدة فقط .

مثال: ١

بيان ع = { (٢، ١) ، (٥، ٣) ، (٧، ٤) }
 دي دالة { (٥، ٧) ، (٢، ٥) }

لكن بيان ع = { (٢، ١) ، (٣، ١) ، (٤، ٥) }

ليست دالة عرفت ليه

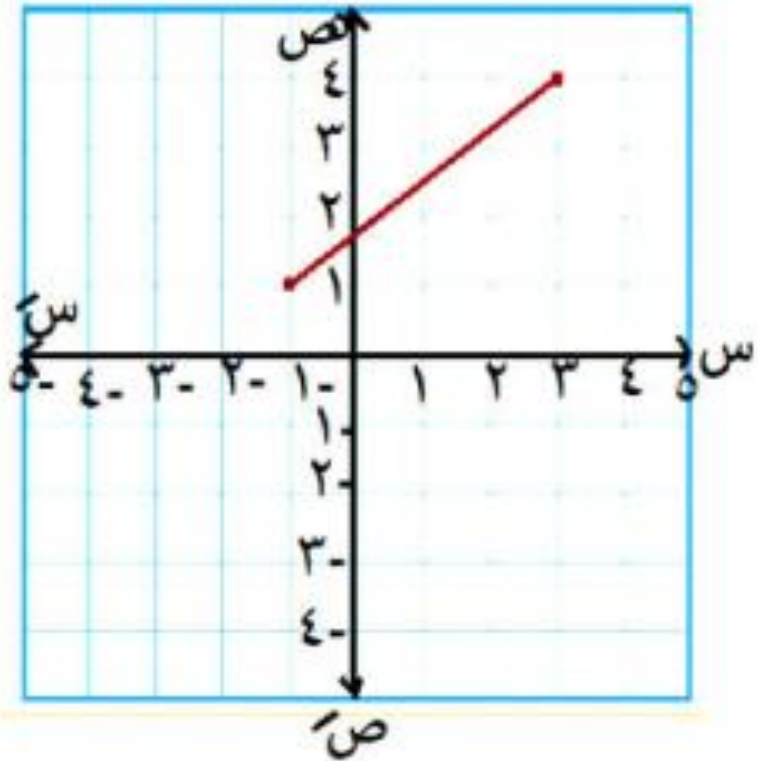
كيفية تعيين المجال والمدى من الرسم

- ١ المجال من محور السينات
٢ المدى من محور الصادات

أكمل:

- ١ تسمى مجموعة الإحداثيات السينية
ب..... مجال الدالة
٢ تسمى مجموعة الإحداثيات الصادية
ب..... مدى الدالة

مثال ٦ : عين المجال والمدى

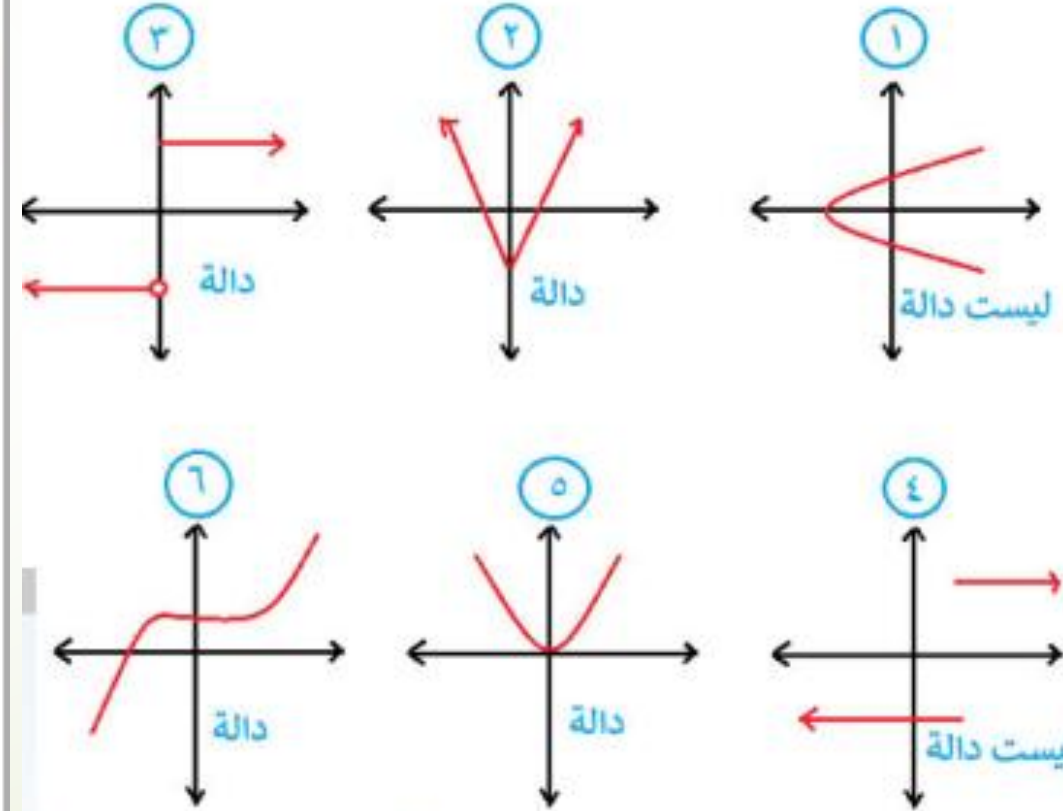


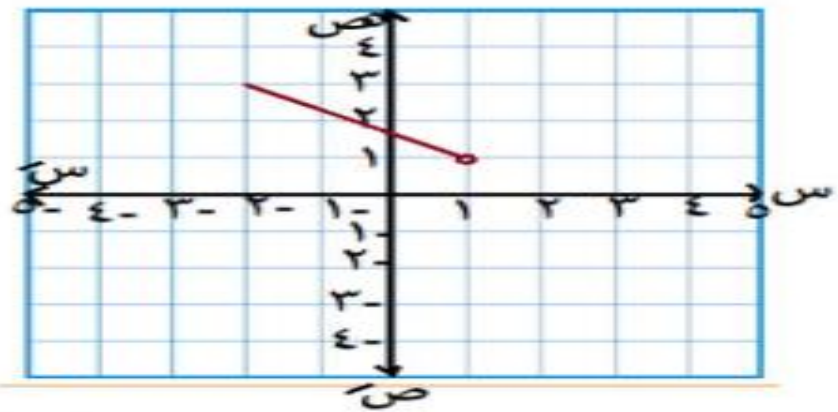
المجال
| -١ ، ٣ |
المدى
| ١ ، ٤ |

٤ من إختبار الخط الرأسي

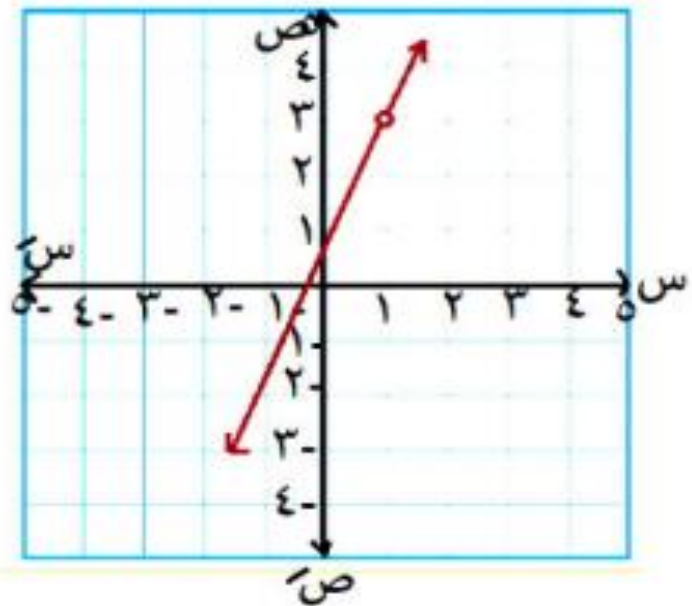
إذا وجد خط رأسي (موازي لمحور الصادات)
يقطع الشكل البياني في أكثر من نقطة فإن
العلاقة لا تمثل دالة .

مثال ١ : بين أي من الأشكال الآتية دالة :

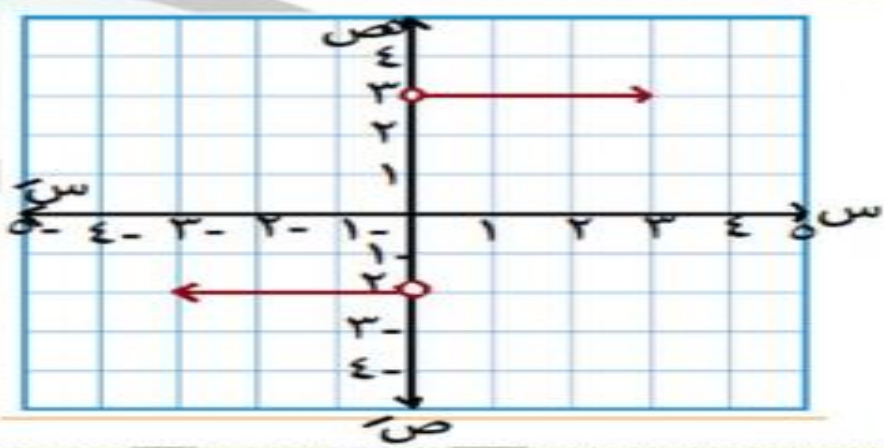




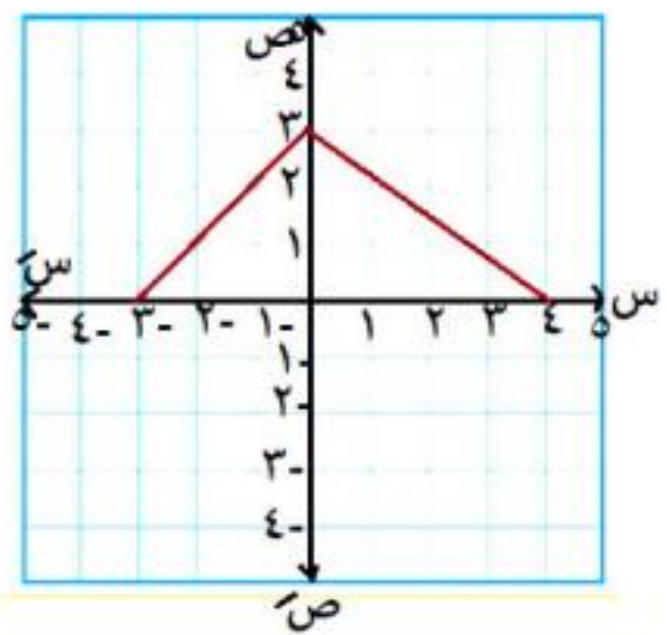
المجال
 $[-1, 1]$
 المدى
 $[1, 2]$



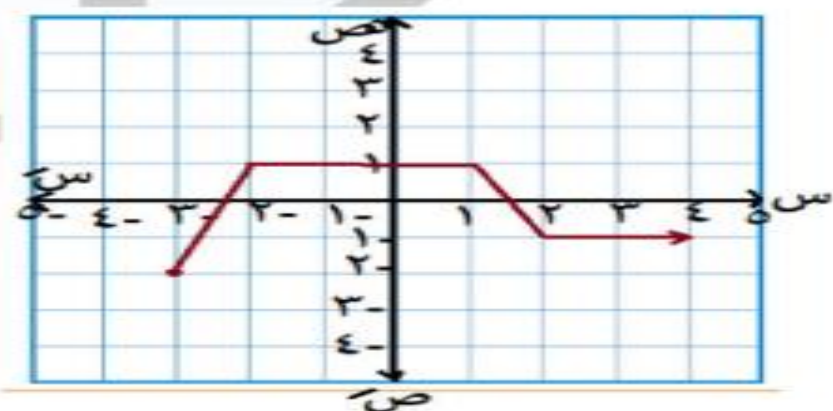
المجال
 ح - $\{1\}$
 المدى
 ح - $\{3\}$



المجال
 ح - $\{0\}$
 المدى
 $\{-3, 2\}$



المجال
 $[-3, 4]$
 المدى
 $[0, 3]$



المجال
 $[-3, \infty]$
 المدى
 $[-2, 2]$

مثال ٧ : ارسم الشكل البياني واستنتج المجال والمدى :

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s \geq 2 - 3 \\ 5 \geq s \geq 2 \end{array} \right\} = (s) \text{ د}$$

مثال ٨ :

$$\left. \begin{array}{l} 0 > s \geq 2 - 3 \\ 4 \geq s \geq 0 \end{array} \right\} = (s) \text{ د}$$

مثال ٧ : ارسم الشكل البياني واستنتج المجال والمدى :

$$\left. \begin{array}{l} 2 > s \geq 2 - 0, 3 \\ s \geq 2 \end{array} \right\} = (s) =$$

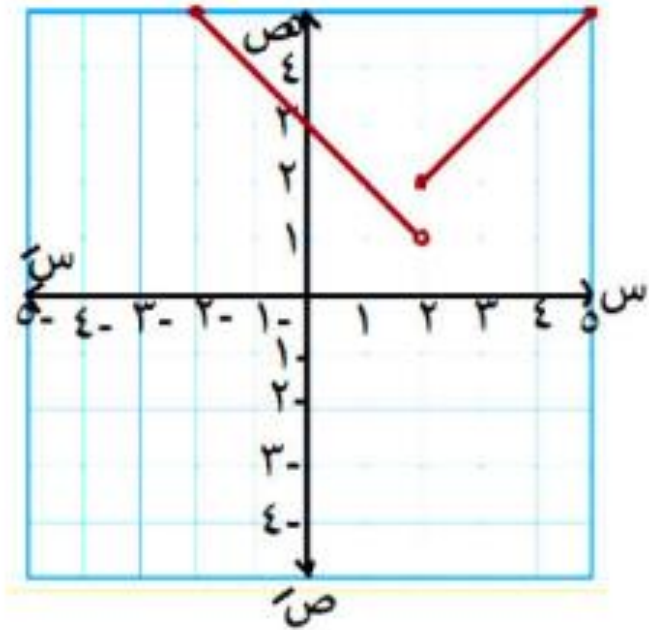
مثال ٨ :

$$\left. \begin{array}{l} 2s + 3 \geq 0, 3 > s \\ s - 1 \geq 0, s \geq 4 \end{array} \right\} = (s) =$$

الحل

س	٢	٢	٢	٥
ص	٢	٢	٢	٥

س	٢	٠	٢	٥
ص	٢	٢	٥	٥

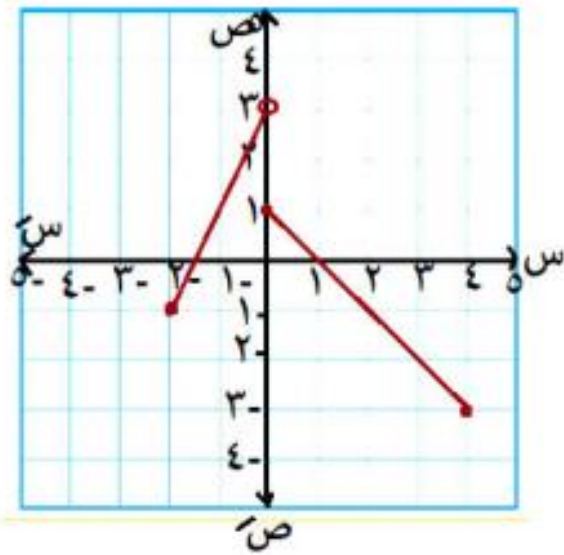


المجال
[٥ , ٢-]
المدى
[٥ , ١]

الحل

س	٢	٠	٤
ص	١	١	٣

س	٢	١	١
ص	١	١	٣



المجال
[٤ , ٢-]
المدى
[٣ , ٣-]

مثل بيانيا الدوال الآتية مبينا المجال والمدى

$$(1) \quad \text{د(س) = } 2s - 3 \quad \text{حيث } 1 \leq s < 4$$

$$(2) \quad \text{د(س) = } 3 - s \quad \text{حيث } s \in]2, \infty]$$

$$(3) \quad \text{د(س) = } 1 + s^3 \quad \text{حيث } s > 0$$

$$(4) \quad \text{مثل بيانيا الدالة د(س) = } \left. \begin{array}{l} 1 + s \\ 2 - s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{عندما } s \leq 2 \\ \text{عندما } s > 2 \end{array}$$

$$(5) \quad \text{مثل بيانيا الدالة د(س) = } \left. \begin{array}{l} 3 - s \\ 1 + s \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{عندما } s > 1 \\ \text{عندما } s < 1 \end{array}$$

كيفية تعيين المجال من قاعدة الدالة

مثال ٢ : عين مجال كلاً مما يأتي :

$$(١) \text{ د(س) = س}^٦ + ٢س$$

$$(٢) \text{ د(س) = س}^٥ - ٤$$

$$(٣) \text{ د(س) = ٧}$$

$$(٤) \text{ د(س) = } \frac{\text{س}^٢ - ٥س}{٣}$$

الاجابة

الدالة الكسرية مجالها
= ح - { أصفار المقام }

٢

$$\frac{٥س + ١}{١٢٥ - س^٢} = \text{د(س)} \quad \text{٣}$$

بوضع $س = ١٢٥ - س^٢$
: $س = ١٢٥$

$س = \sqrt{١٢٥}$
: المجال = ح - {٥}

$$\frac{س - ٣}{س^٢ - ٤} = \text{د(س)} \quad \text{٢}$$

بوضع $س = ٤ - س^٢$
: $س = ٤$

$س = \sqrt{٤} = \pm ٢$
: المجال = ح - { ± ٢ }

$$\frac{٣س^٢ - ٣}{س + ٥} = \text{د(س)} \quad \text{١}$$

بوضع $س + ٥ = ٠$
: $س = -٥$

: المجال = ح - { -٥ }

متنساش

(١) **مجموع المربعين** : دائماً مجاله ح سواء تحت الكسر أو تحت الجذر أو في الشارع
مثل : $s^4 + 5$ ، $s^2 + 3$
 $s^2 + 9$ ، $s^2 + 4$

(٢) **إذا كان ما تحت الجذر دالة تربيعية** :
 فيجب عليك بحث إشارة الدالة التي كانت في أولي ثانوي. (كانت في أولي أول)

مجال الجذر

دليل الجذر فردي

في البسط

المجال = ح

في المقام

ح - { اصفار المقام }

دليل الجذر زوجي

في البسط

• ما تحت الجذر ≤ 0

في المقام

• ما تحت الجذر < 0

مثال ٤ : عين مجال كلاً من الدوال التالية :

١ د(س) = $\sqrt{س - ٢}$

الحل

بوضع $س - ٢ \geq ٠$

$س \geq ٢$: المجال = $][٢, \infty[$

٢ د(س) = $\sqrt{س٢ + ٦}$

الحل

بوضع $س٢ + ٦ \geq ٠$

$س٢ \geq -٦$ $س \geq -٣$

: المجال = $]-٣, \infty[$

٣ د(س) = $\sqrt{٥ - س}$

الحل

بوضع $٥ - س \geq ٠$

$س \leq ٥$

: المجال = $]-\infty, ٥]$

٤ د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س + ٤}}$

الحل

بوضع $س + ٤ > ٠$

$س > -٤$

: المجال = $]-٤, \infty[$

٥ د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س - ٧}}$

الحل

بوضع $س - ٧ > ٠$

$س > ٧$

: المجال = $]٧, \infty[$

٦ د(س) = $\frac{١}{\sqrt{س٢ + ٩}}$

: المجال = \mathbb{R} (مجموع مربعين)

$$\sqrt[3]{3 + 2} = (س) \quad \sqrt[3]{2 + 2} = (س) \quad \sqrt[3]{5 - 2} = (س)$$

∴ المجال = ح

∴ المجال = ح (مجموع مربعين) ∴ المجال = ح (دليل الجذر فردي)
 س + 2 أي عدد

$$\frac{2}{\sqrt[3]{3 - س}} = (س) \quad \text{III}$$

$$\frac{1}{\sqrt[3]{2 - س}} = (س) \quad \text{10}$$

$$س - 3 = 0 \quad س = 2$$

∴ المجال = ح - { 3 }

$$س - 2 = 0 \quad س = 2$$

∴ المجال = ح - { 2 }

**فكرة بسيطة هتمساعدك في بحث اشارة
الدوال التربيعية التي تحت الجذور الزوجية**

هتحلل المقدار وتفرض مثلاً طلع جذرين له وهما

ل ، م

شوف الشرط اللي أنت كنت كاتبه :

هل $\cdot \geq$ أو $\cdot <$

أو $\cdot \leq$ أو $\cdot >$

إذا كان معامل x^2 موجب

في البسط ح - [ل ، م]

في المقام ح - [ل ، م]

إذا كان معامل x^2 سالب

في البسط [ل ، م]

في المقام [ل ، م]

مثال 5: عين مجال كل من الدوال التالية :

1 د(س) = $\sqrt{5س - 6}$

الحل

2 د(س) = $\sqrt{4 - 2س}$

س $5 - 6 \leq 0$

0 $\leq (س - 3)(س - 2)$

س = 2 س = 3

∴ المجال = ح -] 2 ، 3]



س $4 - 2 \leq 0$

0 $\leq (س - 2)(س + 2)$

س = -2 س = 2

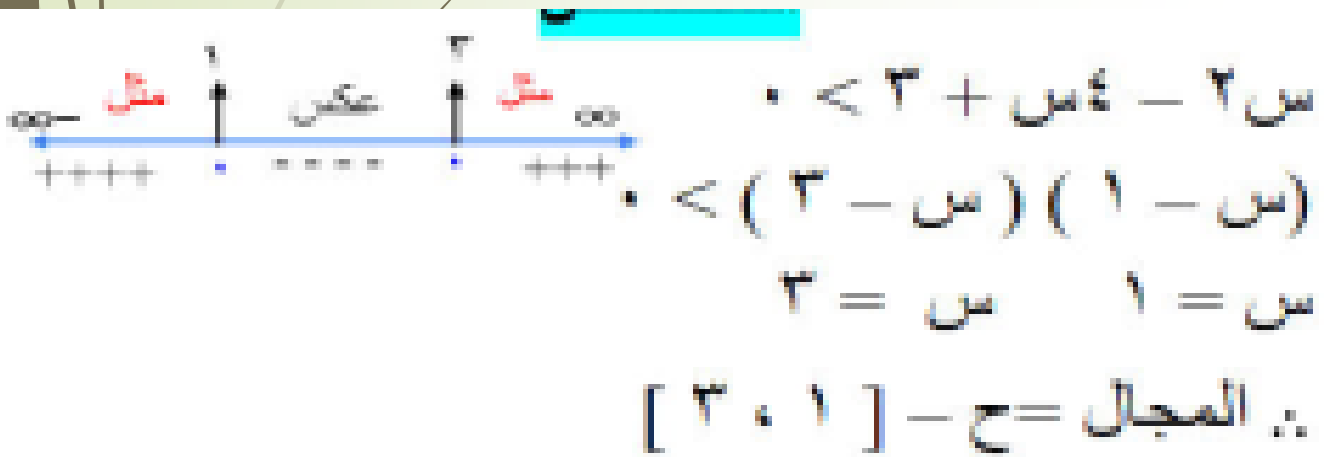
∴ المجال = ح -] -2 ، 2]

الحل

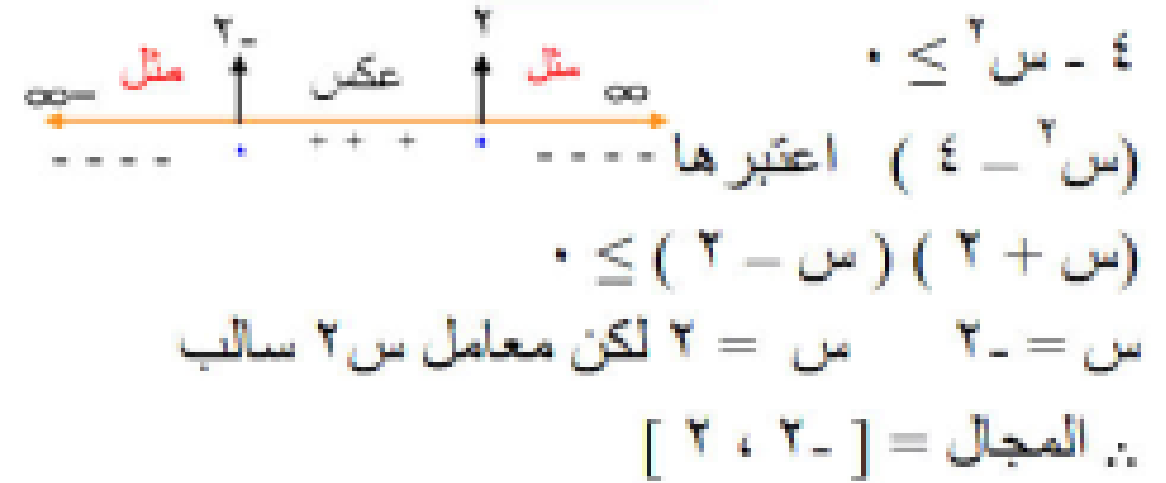


حل انت

$$\frac{1}{\sqrt{3 + 4s - 2s^2}} = \text{د(س)} \quad \text{٤}$$



$$\frac{1}{\sqrt{4 - s^2}} = \text{د(س)} \quad \text{٣}$$



1 عین مجال کلاً مما يلي :

1 د (س) = 5س - 7

2 ر (س) = 11

3 ر (س) = $\frac{2}{س - 5}$

4 د (س) = $\frac{5}{س^2 - 7س + 12}$

5 د (س) = $\frac{4}{س + 3}$

6 د (س) = $\sqrt{س - 5}$

7 د (س) = $\sqrt{س^2 - 25}$

8 د (س) = $\frac{1}{\sqrt{س - 3}}$

9 د (س) = $\frac{7}{\sqrt[5]{س^2 - 6}}$

10 د (س) = $\frac{1}{\sqrt[7]{س^2 - 4}}$

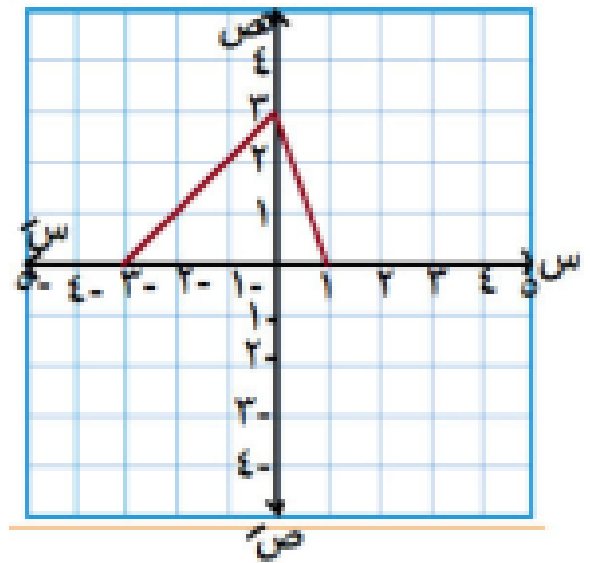
11 د (س) = $\sqrt{س^2 - 9}$

12 د (س) = $\frac{1}{\sqrt[4]{س^2 - 7س + 1}}$

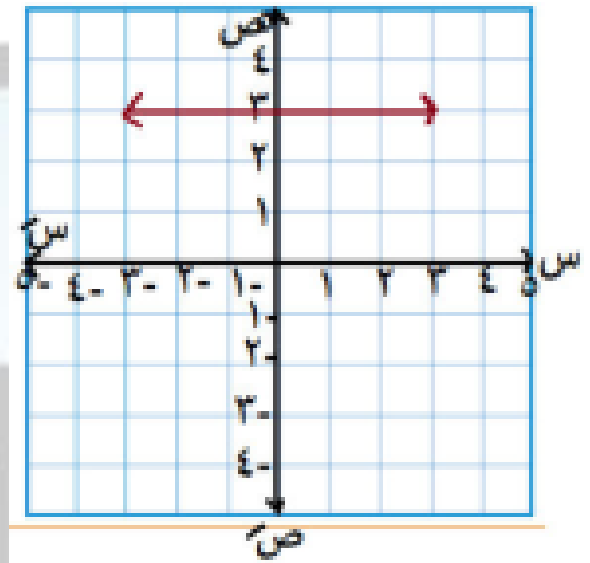
عين مجال ومدى كلاً مما يلي

٢

٣



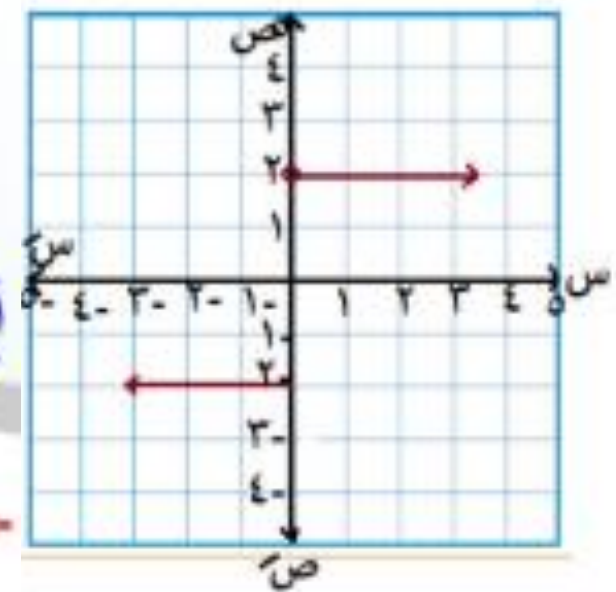
٤



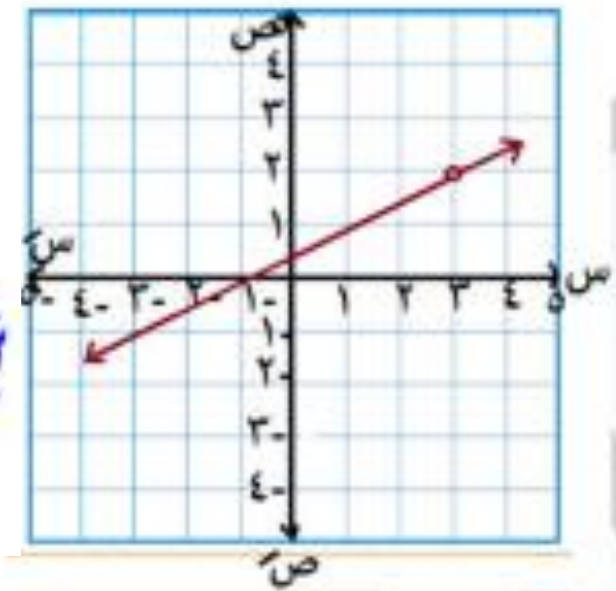
ارسم وعين المجال والمدى

٣

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} - 1, \quad 2 > \text{س} \geq 4 \\ \text{س} - 1, \quad 2 \geq \text{س} \geq 2 \end{array} \right\} \text{١) د (س) =}$$



$$\left. \begin{array}{l} \text{س} + 2, \quad 0 \geq \text{س} \geq 3 \\ \text{س} + 2, \quad 0 \geq \text{س} \geq 4 \end{array} \right\} \text{٢) د (س) =}$$



التقويم:

مثل بيانيا الدالة د مبينا المجال والمدى حيث :

$$(1) \quad \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 < s < 2 \\ \text{عندما } s \leq 2 \end{array} \right\} = \text{د}(s) \quad \left. \begin{array}{l} s+3 \\ s-5 \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{عندما } s \in]2, 2[\\ \text{عندما } s \in [2, 5] \end{array} \right\} = \text{د}(s) \quad \left. \begin{array}{l} s+2 \\ 4 \end{array} \right\}$$

التقويم:

عين مجال الدوال الآتية :

$$(1) \quad \text{د}(s) = 3s^2 - s + 4$$

$$(2) \quad \left. \begin{array}{l} \text{عندما } 1 < s < 2 \\ \text{عندما } s < 2 \end{array} \right\} = \text{د}(s) \quad \left. \begin{array}{l} 1+s^2 \\ 1+s^2 \end{array} \right\}$$

$$(2) \quad \text{د}(s) = \frac{1+s}{1+s^2+s^2}$$

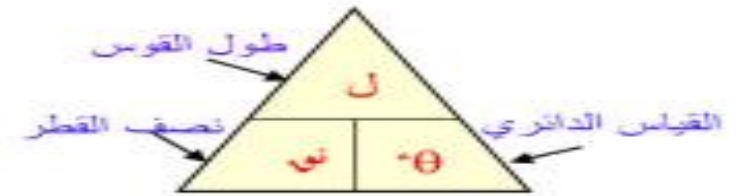
$$(4) \quad \text{د}(s) = \frac{s-2}{9+s^2}$$

الوحدة الرابعة

حساب المثلثات

الصفحة	اسم الدرس	رقم الدرس
١٥٨	قاعدة الجيب	١
١٦٧	قاعدة جيب التمام	٢
١٧٥	حل المثلث	٣

مراجعة علي ما سبق



$$\frac{l}{r} = \theta \quad 1$$

$$\theta = \frac{\pi}{180} \times \text{س} \quad 2$$

$$\text{س} = \frac{180}{\pi} \times \theta \quad 3$$

$$\text{جا}(\theta + 90) = \text{جتا} \theta \quad 4$$

$$\text{جا}(\theta - 90) = \text{جتا} \theta \quad 5$$

$$\text{جا}(\theta - 180) = \text{جا} \theta \quad 6$$

$$\text{جتا}(\theta - 180) = -\text{جتا} \theta \quad 7$$

$$\text{ظا}(\theta - 180) = -\text{ظا} \theta \quad 8$$

$$\text{جا}^2 \text{س} + \text{جتا}^2 \text{س} = 1 \quad 9$$

$$\text{جا}^2 \text{س} - 1 = \text{جتا}^2 \text{س}$$

$$\text{جتا}^2 \text{س} - 1 = \text{جا}^2 \text{س}$$

$$1 + \text{ظا}^2 \text{س} = \text{قا}^2 \text{س} \quad 10$$

$$\text{قا}^2 \text{س} - \text{ظا}^2 \text{س} = 1$$

$$\text{قاس} - 1 = \text{ظاس}$$

$$1 + \text{ظناس} = \text{قناس}$$

$$\text{قاس} - \text{ظناس} = 1$$

$$\text{قاس} - 1 = \text{ظناس}$$

$$1 = \text{جاس} \text{قاس}$$

$$1 = \text{جاس} \text{قاس}$$

$$1 = \text{ظاس} \text{ظناس}$$

$$\frac{\text{جاس}}{\text{جاس}} = \text{ظاس}$$

17

$$\frac{\text{ظناس}}{\text{جاس}} = \text{ظاس}$$

17

$$\text{مساحة المضلع المنتظم} \frac{\pi}{4} \text{ س } \text{ظناس} \frac{\pi}{4}$$

18

$$\text{مساحة الدائرة} = \pi \text{ نو}$$

19

$$\text{محيط الدائرة} = 2\pi \text{ نو}$$

20

$$\text{مساحة المثلث} =$$

$$\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$\text{حيث } s = \text{نصف المحيط}$$

$$= \frac{1}{4} \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

الدرس الأول: قاعدة الجيب

{ في أي مثلث تتناسب أطوال أضلاع المثلث
مع جيوب الزوايا المقابلة لها }

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

حيث a نصف قطر الدائرة الخارجة للمثلث

الفكرة الأولى مسائل مباشرة

مثال (١) Δ ب ج فيه $\hat{ب} = ٤٠^\circ$ سم ، و $\hat{ج} = ٨٠^\circ$

، و $\hat{ب} = ٨٠^\circ$ أوجد طول أكبر الأضلاع

طويلاً لأقرب سم

$$جأ = \frac{٤٠ \cdot جأ \cdot ٨٠}{٥٦} = ٢٩,٤٦ \approx ٢٩ \text{ سم}$$

الحل

أكبر الأضلاع يقابل أكبر الزوايا

$$\hat{ب} = ٦٠^\circ = [٨٠^\circ + ٤٠^\circ] - ١٨٠^\circ = \hat{ج}$$

$$\frac{جأ}{جأ} = \frac{بأ}{جأ} = \frac{١}{جأ}$$

$$\frac{جأ}{٨٠ \cdot جأ} = \frac{١٠}{٦٠ \cdot جأ} = \frac{١}{٤٠ \cdot جأ}$$

أكبر الأضلاع هو جأ

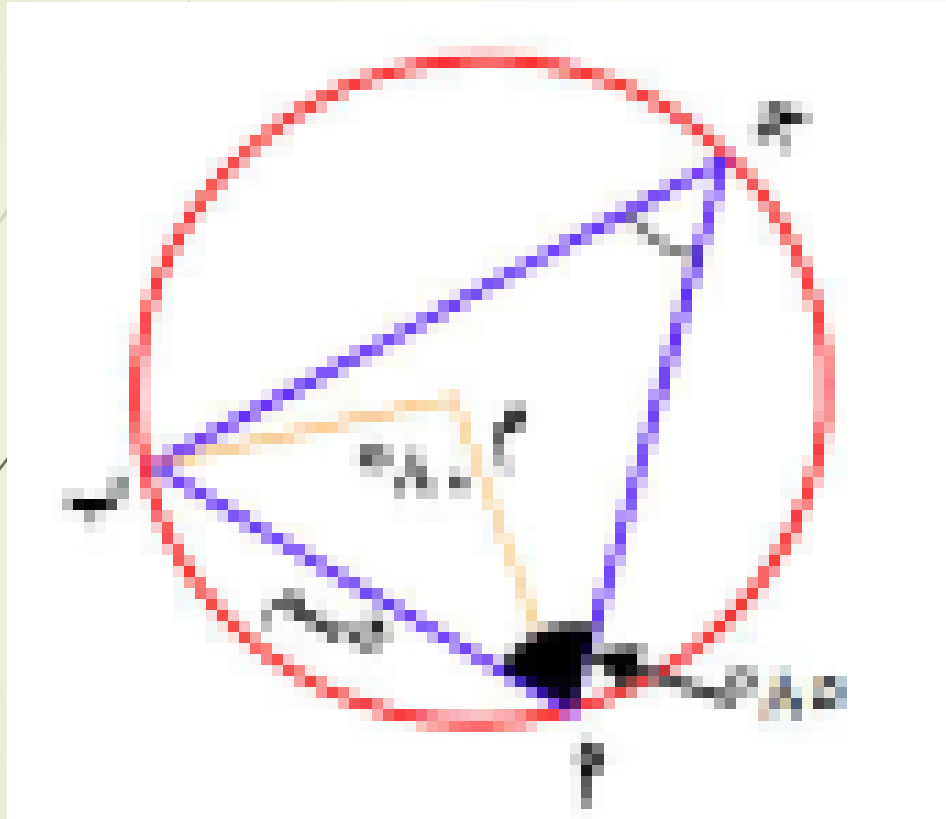
مثال (3) في الشكل المقابل م دائرة م ب =

قسم ق (م ب) = 90° ، ق (ج ب) = 30°

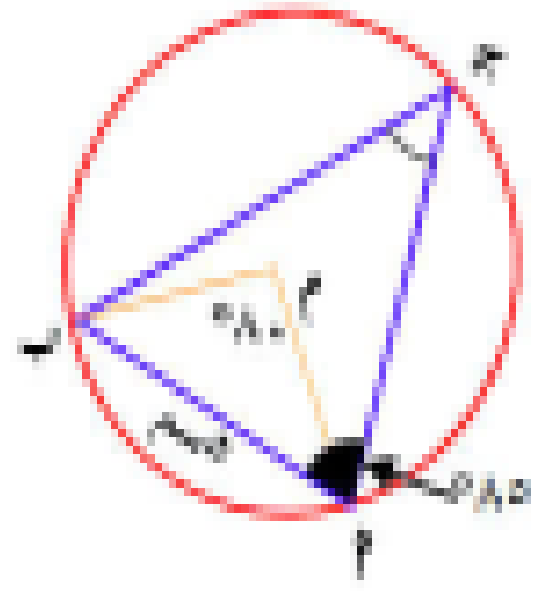
أوجد:

(أ) محيط Δ م ب ج

(ب) مساحة سطح الدائرة م



الحل



في $\Delta P B J$

$$\hat{P} = (\hat{J}) = 45^\circ$$

لأن قياس المحيطة $= \frac{1}{2}$ المركزية المشتركة معها في نفس القوس

$$\therefore \hat{J} = 45^\circ \text{ سم } \hat{P} = (\hat{J}) = 45^\circ \text{ سم } \hat{B} = (\hat{P} + \hat{J}) = 90^\circ$$

$$\hat{B} = (\hat{P} + \hat{J}) - 180^\circ = 90^\circ$$

$$\hat{P} = \frac{P}{\text{جاء}} = \frac{P}{\text{جاء}} = \frac{P}{\text{جاء}}$$

$$\hat{P} = \frac{P}{\text{جاء}} = \frac{P}{\text{جاء}} = \frac{P}{\text{جاء}}$$

$$\therefore \hat{P} = \frac{80 \text{ جاء}}{1 \text{ جاء}} = 80^\circ \text{ سم}$$

$$\hat{P} = \frac{50 \text{ جاء}}{1 \text{ جاء}} = 50^\circ \text{ سم}$$

$$(P) \therefore \text{محيط } \Delta P B J = \hat{P} + \hat{B} + \hat{J}$$

$$9,12 \text{ سم} = 6,27 + 7,75 + 5 =$$

$$(ب) \text{ نون} = \frac{5}{2 \times 3,89} \text{ سم}$$

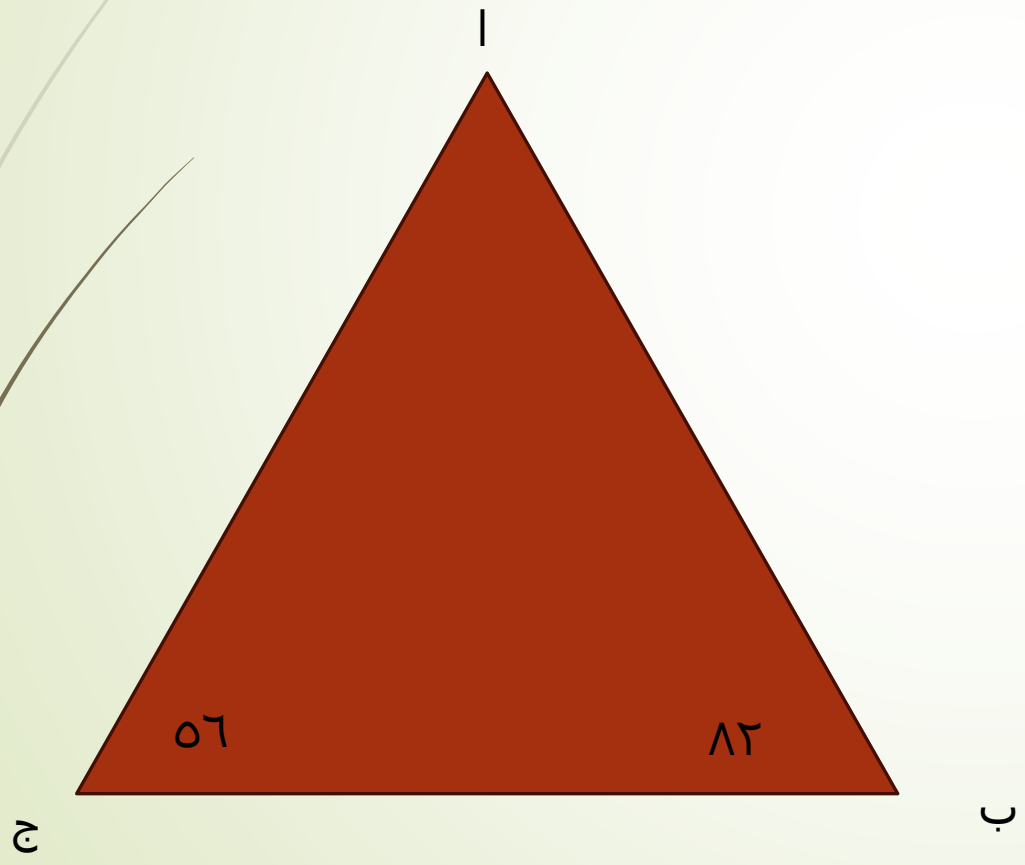
مساحة الدائرة = $\pi \text{ نون}^2$

$$7,5 \text{ سم}^2 = (3,89) \pi =$$

مثال (۱)

در یک مثلث = ۵۰ درجه

و $\hat{B} = ۸۲^\circ$ ، و $\hat{C} = ۵۶^\circ$ اوجد قيمة \hat{A}



مسئله = ۵۰ درجه

$$\frac{P_{\text{جاءت}}}{P_{\text{جاء}}} = \frac{P_{\text{جاءت}}}{P_{\text{جاء}}} = P_{\text{ب}}$$

$$P_{\text{ب}} = \frac{1}{4} P_{\text{جاءت}} = 400 \quad \text{بالتضرب} \times 2$$

$$900 = P_{\text{جاءت}} \times \frac{P_{\text{جاءت}}}{P_{\text{جاء}}} \times P_{\text{ب}}$$

$$900 = \frac{P_{\text{جاءت}}^2}{P_{\text{جاء}} \times P_{\text{ب}}} = P_{\text{ب}}$$

$$P_{\text{ب}} = \sqrt{900} = 30 \text{ نسمة}$$

العل

$$P_{\text{ب}} = (P_{\text{ب}}) = 0.180 = [0.06 + 0.12] - 0.042$$

$$\text{مساحة} \Delta P_{\text{ب}} = P_{\text{ب}} = \frac{1}{4} P_{\text{جاءت}}$$

ولكن $P_{\text{ب}}$ مجهول، $P_{\text{جاءت}}$ مجهول

$$\frac{P_{\text{ب}}}{P_{\text{جاء}}} = \frac{1}{4}$$

الدرس الثاني العمليات على الدوال

ملاحظة

ح n أي فترة = نفس الفترة
لأنها جزئية من ح

إذا كانت D (س) مجالها M
، E (س) مجالها M'

فإن:

① $D \pm E$ (س) مجالها $M \cap M'$

② $D \times E$ (س) مجالها $M \cap M'$

③ $D \div E$ (س) مجالها $M \cap M' - \{اصطار E\}$

الفكرة الأولى مسائل مباشرة

مثال ١ : إذا كانت $d : c = 4 - c$

حيث d (س) = $2س^2 - 4س + 5$

ر : $| -\infty, 0 |$ — c

حيث r (س) = $2س - 5$ فأوجد :

١ $\frac{(d + r)(س)}{(d + r)(3)}$

٢ $\frac{(d - r)(س)}{(d - r)(-1)}$

٣ $\frac{(d \times r)(س)}{(d \times r)(-3)}$

٤ $\frac{(r)}{(r)}(س) \frac{(r)}{(r)}(1)$

طريقه الحل اولاً بنجيب مجال د ١ ثم مجال د ٢ ثم تقاطع د١ مع د ٢ ثم نجيب المطلوب

$$(2x^2 - 7x + 5) + (x^2 - 5x + 5)$$

$$2x^2 - 7x + 5 + x^2 - 5x + 5 =$$

$$3x^2 - 12x + 10 =$$

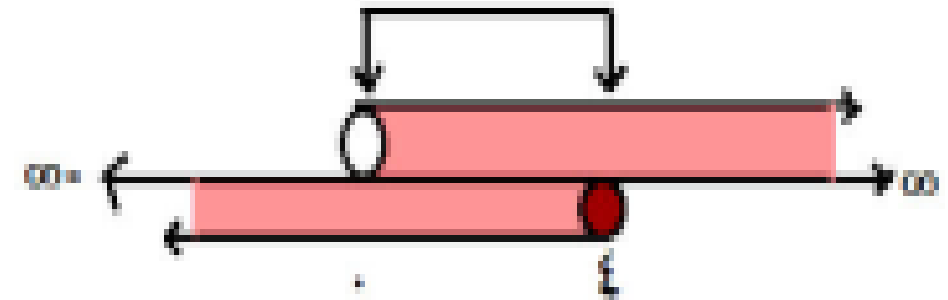
$$\text{المجال } [0, \infty)$$

القيمة العددية (د + ر) (٣)

$$r = 15 - 18 = (3) \quad s = (3) \quad r =$$

$$\text{مجال د} = 1 \text{ م} = \text{ح} = [0, \infty)$$

$$\text{مجال ر} = 2 \text{ م} = [0, \infty)$$



$$1 \text{ م} \cap 2 \text{ م} = [0, 1]$$

١ (د + ر) (س) فنجمعهم

٣ (د × ر) (س) هنضرب بهم

$$(٥س٢ - ٥) (٥س٧ - ٥س٢)$$

$$(٥س٢ - ٥) (٥س٧ - ٥س٢)$$

$$= ٥س٤ - ٥س١٤ + ٥س١٠ - ٥س١٠$$

$$+ ٥س٣٥ - ٢٥$$

$$= ٥س٤ - ٥س٢٤ + ٥س٤٥ - ٢٥$$

المجال [٤، ٥]

القيمة العددية (د × ر) (-٣)

∴ -٣ ∉ للمجال

∴ (د × ر) (-٣) غير معرفة

٢ (د - ر) (س) هنطرحهم

$$(٥س٢ - ٥س٧ + ٥) - (٥س٢ - ٥)$$

$$= ٥س٢ - ٥س٧ + ٥ - ٥س٢ + ٥$$

$$= ١٠ - ٥س٩ + ١٠$$

المجال [٤، ٥]

القيمة العددية (د - ر) (٥)

∴ ٥ ∉ للمجال

∴ (د - ر) (٥) غير معرفة

٤ $\left(\frac{s}{r}\right) (s) \left(\frac{s}{r}\right) (1)$

$$= \frac{s^2 - 5s + 5}{s^2 - 5} = \frac{(s-1)(s-5)}{(s-5)}$$

بوضع $s^2 - 5 = 0$

$$s^2 = 5 \quad \therefore s = \frac{5}{2}$$

$$\therefore \frac{s}{r} = s - 1$$

والمجال $\{ \frac{5}{2} \} - \{ 0, 5 \}$

القيمة العددية $\left(\frac{5}{2}\right) (1) = 1 - 1 = 0$ صفر

مثال ۲ : إذا كانت د ۱ = (س) ۲ + س

ومجال د ۱ = [۳- ، ۴] ،

د ۲ = (س) ۲ + ۲س

ومجال د ۲ = [۱- ، ۳]

$$\left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(3-\right) \leftarrow (س) \left(\frac{2d}{1d}\right)$$

۴

أوجد :

۱ $\left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(3-\right) \leftarrow \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(3-\right)$

۲ $\left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(3-\right) \leftarrow \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(4-\right)$

۳ $\left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(3-\right) \leftarrow \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(\frac{2d}{1d}\right) \left(0-\right)$

الحل

$$[4, 3-] = 1م$$

$$[3, 1-] = 2م$$



$$[3, 1-] = 2م \cap 1م$$

١ (د + ١د) (س)

$$س + ٢ + س + ٢س$$

$$= س + ٢س + ٢ + س^٣ \quad \text{المجال } [3, 1-]$$

$$\text{القيمة العددية (د + ١د) (٣)}$$

$$٢٠ = ٢ + ٩ + ٩ = ٢ + (٣) ٣ + (٣) =$$

٢ (د - ١د) (س)

$$س + ٢ - (س + ٢س)$$

$$= س + ٢ - س - ٢س$$

$$= -س - ٢ + س \quad \text{المجال } [3, 1-]$$

$$\text{القيمة العددية (د - ١د) (٤)}$$

∴ ٤ ∉ للمجال

∴ (د - ١د) (٤) غير معرفة

$$4 \quad \left(\frac{2D}{D} \right) (S)$$

$$\frac{(S + 2)S}{(S + 2)} = \frac{S^2 + 2S}{S + 2} =$$

أصفار المقام = { -2 }

$$\therefore \left(\frac{2D}{D} \right) (S) = S$$

والمجال [-1 ، 3]

هنا في الحالة دي مقلناش فرق { -2 } لأن { -2 } مش داخله في الفترة

القيمة العددية $\left(\frac{2D}{D} \right) (-3)$ غير معرفة

لأن -3 ∉ للمجال

$$3 \quad (D + 1)(D + 2) (S)$$

$$(S + 2)(S + 1)$$

$$S^3 + S^2 + S^2 + S + S^4 + S^3 =$$

$$S^4 + 2S^3 + S^2 + S =$$

المجال [-1 ، 3]

$$(D + 1)(D + 2) (0)$$

$$= 0 + (0)^2 + (0)^3 = 0$$

مثال ٣ : عين مجال كلاً من الدوال الآتية :

$$\frac{1+s}{9} + \frac{5}{7+s^2} + \frac{1}{s-2} = \text{د(س) } ٥ \quad \frac{2}{s^2-6} + s = \text{د(س) } ٣$$

$$\frac{2}{s-5} + \frac{1}{s} = \text{د(س) } ١$$

$$\begin{aligned} ١م - ح &= \{2\} \\ ٢م - ح &= \text{مجموع مربعين} \\ ٣م - ح &= \text{المقام مفهوش س} \\ \therefore \text{المجال المشترك ح} &= \{2\} \\ \text{المجال المشترك هو ح} &= \{3\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ١م - ح &= \{0\} \\ ٢م - ح &= \{5\} \\ \therefore \text{المجال ح} &= \{0, 5\} \end{aligned}$$

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{1-s^2} - \frac{1}{s^2+2s+5} = \text{د(س) } ٤ \quad \frac{5}{s-7} + \frac{1}{s^2-9} = \text{د(س) } ٢$$

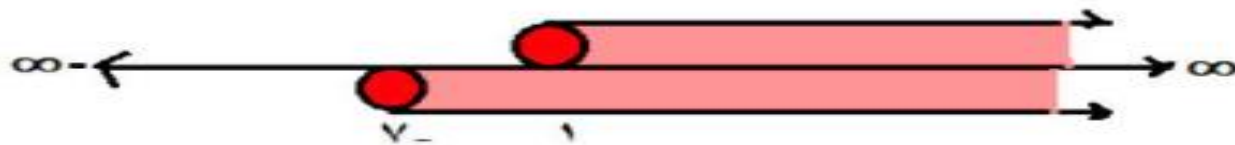
$$\begin{aligned} ١م - ح &= \text{مجموع مربعين} \\ ٢م - ح &= \{1 \pm\} \text{ فرق بين مربعين} \\ ٣م - ح &= \{0\} \\ \therefore \text{المجال المشترك ح} &= \{0, 1 \pm\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ١م - ح &= \{3 \pm\} \\ ٢م - ح &= \{7\} \\ \therefore \text{المجال ح} &= \{7, 3 \pm\} \end{aligned}$$

الفكرة الثانية مسائل الجذور

$$2 \quad \sqrt{s+2} + \sqrt{s-1} = (s) \quad \text{مثال ٤ : عين مجال كلاً مما يلي :}$$

$$\begin{aligned} \text{م ١} \quad & 0 \leq s-1 \quad \text{م ٢} \quad 0 \leq s+2 \\ \text{م ١} \quad & \therefore]-\infty, 1] = \text{م ٢} \quad \text{م ٢} \quad 0 \leq s+2 \\ \text{م ٢} \quad & 0 \leq s+2 \quad \text{م ٢} \quad \therefore]-\infty, -2] = \text{م ١} \\ \text{م ٢} \quad & \therefore]-\infty, -2] = \text{م ١} \end{aligned}$$



$$\therefore \text{المجال المشترك} =]-\infty, 1]$$

$$\begin{aligned} 0 &= (s+2)(s-1) \\ s &= -2 \quad \text{أو} \quad s = 1 \end{aligned}$$

$$\therefore \text{م ١} \cap \text{م ٢} =]-\infty, -2] \cup]-\infty, 1]$$

$$1 \quad \sqrt{s+2} - \sqrt{s-1} = (s) \quad \text{مثال ٣ : عين مجال كلاً مما يلي :}$$

$$\text{م ١} \quad \text{" دليل الجذر فردي "}$$

$$\text{م ٢} \quad 0 \leq s-1 \quad \text{م ٢} \quad 0 \leq s+2$$

$$\text{م ٢} \quad \therefore]-\infty, 1] = \text{م ١}$$

$$\therefore \text{م ١} \cap \text{م ٢} =]-\infty, 1]$$

$$3 \quad \frac{\sqrt{s+2}}{s-2} = (s) \quad \text{مثال ٣ : عين مجال كلاً مما يلي :}$$

$$\text{م ١} \quad 0 \leq s+2 \quad \text{م ٢} \quad 0 \leq s-2$$

$$\text{م ٢} \quad \therefore]-\infty, 2] = \text{م ١}$$

$$\text{م ٢} \quad 0 = s-2 \quad \text{م ٢} \quad 0 = s+2$$

$$\frac{1}{\sqrt{s^2 - 1}} + \frac{s^2 - 9}{s + 3} = (s) \quad \text{٥ د}$$

١م المقام الأول ← $s + 3 = 0$ $s = -3$

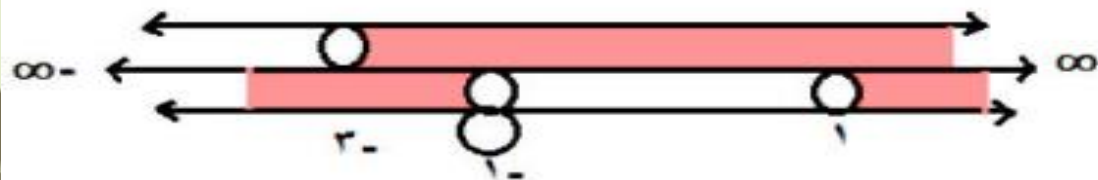
ح - $\{-3\}$

٢م الجذر ← $s^2 - 1 < 0$

$$0 < (s + 1)(s - 1)$$

ح - $[-1, 1]$

∴ المجال المشترك



$$[-1, 1] \cup \{-3\} \text{ - }]-\infty, -1[$$

$$\frac{s^2 + 2}{\sqrt{s^2 - 2}} = (s) \quad \text{٤ د}$$

علشان تكون فاهم

مينفعش ما تحت الجذر يبقي سالب
ومينفعش المقام = صفر صح

١م البسط ← ح مفهوش مشاكل

٢م الجذر ← $s^2 - 2 \geq 0$

$s \geq \sqrt{2}$

∴ م ٢ = $[\sqrt{2}, \infty[$

٣م للمقام كله ←

$$0 = s^2 - 2$$

$$\text{بالتربيع} \quad 1 = \sqrt{s^2 - 2}$$

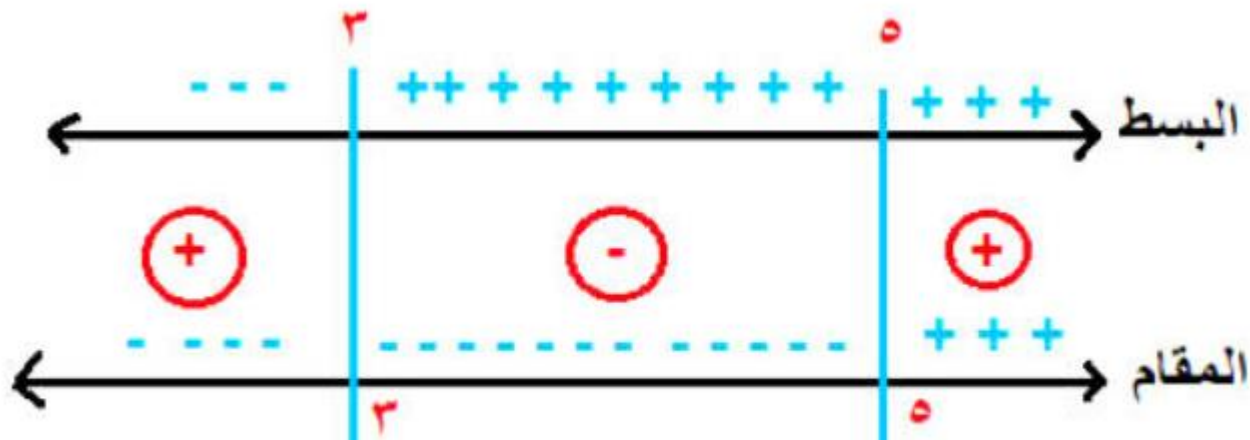
$$s^2 - 2 = 1$$

$$s^2 = 3$$

∴ المجال المشترك = $[\sqrt{2}, \infty[\text{ - }]-\infty, -\sqrt{3}]$

$$V = \frac{3-s}{5-s}$$

ركز في ده طريقة بحث الإشارة



الكسر هيكون موجب

في الفترتين اللي أنا موضحهم

∴ المجال $]-\infty, 3[\cup]5, \infty[$

متناساش في الفرق بنقل المفتوح

و نفتح المغلقة

أو ح - $]3, 5[$

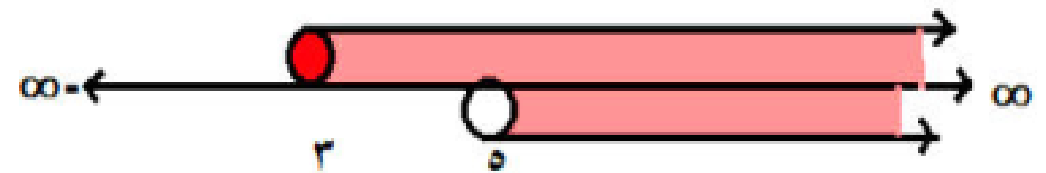
$$V = \frac{3-s}{5-s}$$

م ١ مجال البسط ← $s - 3 \leq 0$ $s \leq 3$

∴ م ١ = $]-\infty, 3]$

م ٢ مجال المقام ← $s - 5 < 0$ $s < 5$

∴ م ٢ = $]-\infty, 5[$



∴ م ١ ∩ م ٢ = $]-\infty, 5[$

تركيب دالتين

أطباء ومهندسون فقط

علمي
فقط

(د 0 ر) (س)

تقرأ د تركيب ر
أو د بعد ر

تطبق قاعدة الدالة ر الأول وبعدين د

$$٤ \quad (٢) (٥٠ ر)$$

الحل

$$٨ = ٣ (٢) = (٢) د$$

$$٩ = ١ + ٨ = (٨) ر$$

مثال ٢ : إذا كانت د(س) = ٣س + ١

$$ر (س) = ٥ - ٢س$$

فأوجد : (٥٠ ر) (س)

ثم أوجد : (٥٠ ر) (١)

$$(٥٠ ر) (س) = د (ر(س))$$

$$١ + (٥ - ٢س) ٣ = (٥ - ٢س) د =$$

$$١٤ - ٢س٣ = ١ + ١٥ - ٢س٣ =$$

$$١٤ - ٢(١) ٣ = (١) (٥٠ ر)$$

$$١١ = ١٤ - ١٣ =$$

مثال ١ : إذا كانت د(س) = ٣س ،

$$ر (س) = ١ + س$$

فأوجد :

$$١ (٥٠ ر) (١)$$

الحل

$$٢ = ١ + ١ = (١) ر$$

$$٨ = ٣ (٢) = (٢) د$$

$$٢ (٥٠ ر) (٠)$$

الحل

$$١ = ١ + ٠ = (٠) ر$$

$$١ = ٣ (١) = (١) د$$

$$٣ (٥٠ ر) (-١)$$

الحل

$$١ - = ٣ (-١) = (-١) د$$

$$٠ = ١ + ١ - = (-١) ر$$

$$\text{بوضع } ٤٢ = ٦ + ٩س^٢$$

$$\therefore ٦ - ٤٢ = ٩س^٢$$

$$٣٦ = ٩س^٢$$

$$\frac{٣٦}{٩} = س^٢$$

$$س^٢ = ٤ \therefore س = \pm \sqrt{٤}$$

$$\therefore س = \pm ٢$$

مثال ٣ : إذا كانت د(س) = $٦ + ٩س^٢$ ،

$$ر(س) = ٣س^٣$$

١ أوجد : (د ٥ ر) (٣)

٢ حدد قيم س التي تجعل

$$٤٢ = (س) (د ٥ ر)$$

١ (د ٥ ر) (٣)

$$د = (٣) ر = (٣ \times ٣) د = (٩) د$$

$$٨٧ = ٦ + ٨١ = ٦ + ٩(٩) = (٩) د$$

$$(د ٥ ر) (س) = (٣) ر(س)$$

$$د = (٣س^٣) = ٦ + ٩س^٢$$

$$٦ + ٩س^٢ =$$

كيفية إيجاد مجال تركيب دالتين

لإيجاد مجال (د ٥ ر) (س)

١ م ١ ← مجال ر الأول

٢ هتعمل التركيب

وتجيب المجال الجديد م ٢

٣ وبعدين تجيب م ١ ∩ م ٢

هيكون هو مجال (د ٥ ر) (س)

مثال ٤ :

إذا كانت د(س) = $\sqrt{١ - ٢س}$ ،

ر(س) = $٣ - ٢س$

فأوجد : (د ٥ ر) (س) في أبسط صورة
موضحاً المجال .

ثم أوجد : (د ٥ ر) (٢)

١م ← مجال ر = ح كثيرة الحدود

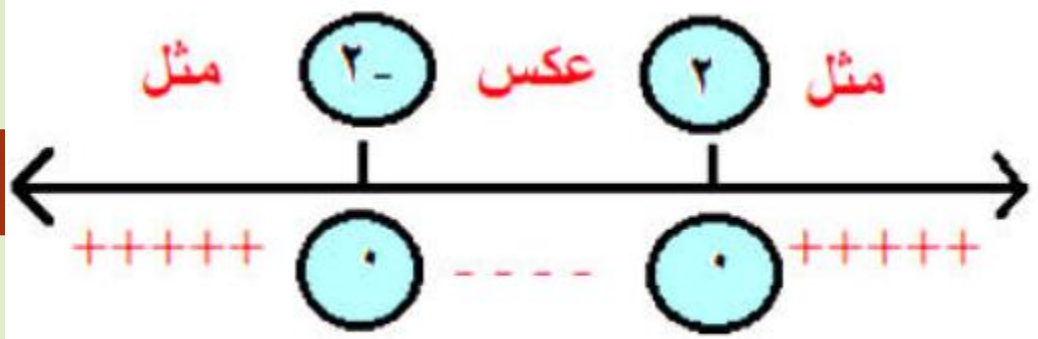
وبعدين (د ٥ ر) (س) = د (ر(س))

$$د = (٣ - ٢س) = \sqrt{١ - ٣ - ٢س} = \sqrt{٤ - ٢س}$$

٢م ← المجال $٠ \leq ٤ - ٢س$

$$٠ \leq (٢ + س) (٢ - س)$$

$$٢م = ٢ - [- ح] ، ٢$$



∴ مجال (د ٥ ر) (س) = $١م \cap ٢م$

$$= [- ح] ، ٢$$

القيمة العددية (د ٥ ر) (٢)

$$٠ = \sqrt{٤ - ٢س} = \sqrt{٤ - ٢س}$$

مثال ٥ : إذا كانت د(س) = $\frac{1}{س}$ ،

$$ر(س) = س + ٣$$

أوجد : (د ٥ ر) (س) موضحاً المجال .

ثم أوجد : (ر ٥ د) (س) موضحاً المجال .

١ م ← مجال ر = ح كثيرة الحدود

وبعدين (د ٥ ر) (س) = د (ر (س))

$$\frac{1}{س+٣} = د (س + ٣) =$$

$$٢م = ح - \{٣-\}$$

$$\therefore ١م \cap ٢م = ح - \{٣-\}$$

∴ مجال (د ٥ ر) (س) = ح - \{٣-\}

٢ (ر ٥ د) (س) موضحاً المجال

حل انت

مثال ٦ : إذا كانت د(س) = $\sqrt{س - ٢}$ ،

$$ر(س) = \sqrt{س - ٤}$$

فأوجد : (ر د) (س) ومجالها .

م ١ ← مجال د

$$س - ٢ \geq ٠ \quad س \leq ٢ \quad] \infty , ٢]$$

$$ر(د(س)) = ر(\sqrt{س - ٢})$$

$$ر(د(س)) = \sqrt{\sqrt{س - ٢} - ٢}$$

$$= \sqrt{\sqrt{س - ٢} - ٢}$$

$$م ٢ ← ٤ - \sqrt{س - ٢} \geq ٠$$

$$- \sqrt{س - ٢} \leq - ٤$$

$$\sqrt{س - ٢} \geq ٤ \quad \text{بالتربيع}$$

$$س - ٢ \geq ١٦ \quad س \geq ١٨$$

$$س \geq ١٨ \quad \therefore م ٢ =] ١٨ , \infty [$$

$$\therefore \text{مجال (د ر) (س)} = م ١ \cap م ٢$$

$$=] ١٨ , ٢]$$

مثال ٧ : إذا كانت $E(S) = 4 - 3S$

فأوجد الدالتين D ، R بحيث يكون

$$E(S) = (S) = (R \circ D) (S)$$

الفكرة إنك بتفرض واحدة منهم \overline{RS}

والثانية $S^3 - 4$

هنشيل S ونضع بدلاً منها

$S^3 - 4 \leftarrow$ يبقي دي $R(S)$

$$R(S) = \overline{RS} ،$$

$$D(S) = S^3 - 4$$

وهناك طرق ثانية كتير

الدرس الثالث

بعض خواص الدوال

ثانياً: الدالة الفردية

٢ من قاعدة الدالة

تكون $d(-s) = -d(s)$

أمثله

$$d(s) = s^3$$

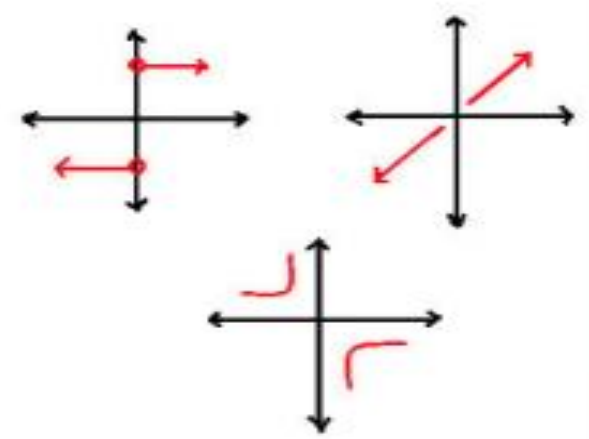
$$d(-s) = (-s)^3$$

$$= -s^3$$

$$= -d(s)$$

١ من الرسم

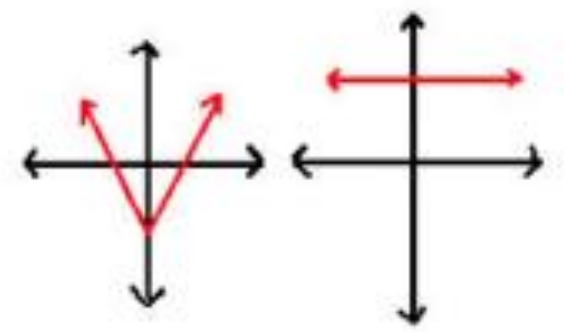
يكون منحنى الدالة متماثل حول نقطة الأصل $(0,0)$ يعني الربع الأول مع الثالث والربع الثاني مع الرابع



أولاً الدالة الزوجية

١ من الرسم

يكون منحنى الدالة متماثل حول محور الصادات $(s=0)$



٢ من قاعدة الدالة

تكون $d(-s) = d(s)$

أمثله

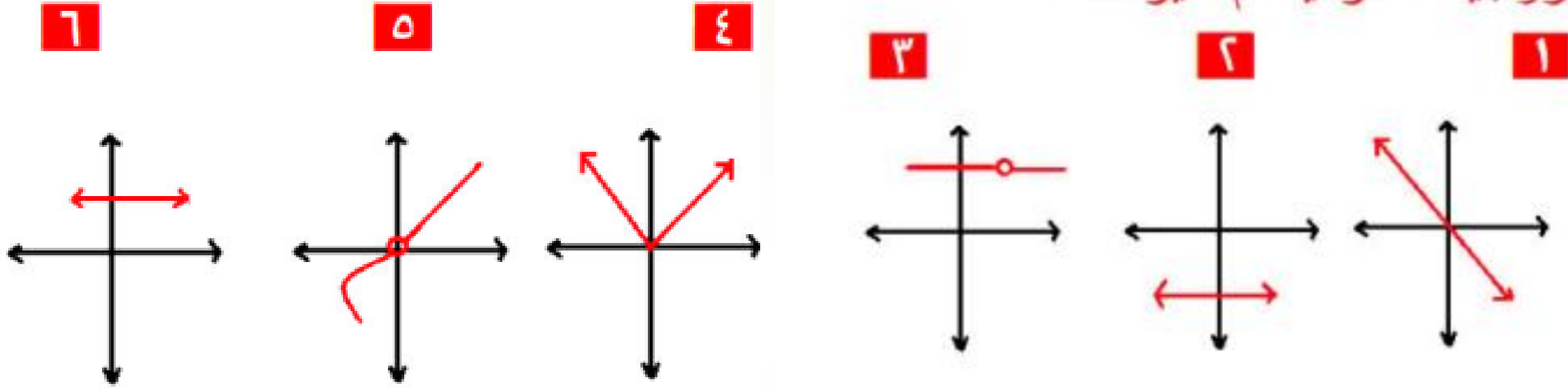
$$d(s) = s^2$$

$$d(-s) = (-s)^2$$

$$= s^2$$

$$= d(s)$$

مثال ١ : بين أي من الدوال الآتية زوجية – فردية أم غير ذلك



لي زوجية

ليست فردية وليست زوجية

زوجية

ليست فردية وليست زوجية

زوجية

فردية

ازاي الجزء الأيمن أكبر من الأيسر أقولك ده سهم يا معلم يعني مبيقفش .

مثال ٢ : بين أي من الدوال الآتية

زوجية – فردية أم غير ذلك

١ د (س) = س^٢ + س^٤ + ١

د (س -) = (س -)^٢ + (س -)^٤ + ١

طبعاً الأس الوجي بياكل السالب

∴ د (س -) = س^٢ + س^٤ + ١

Δ د (س -) = د (س)

∴ الدالة زوجية

٢ د (س) = س^٣ - س^٢

د (س -) = (س -)^٣ - (س -)^٢

∴ د (س -) = - س^٣ + س^٢

= - (س^٢ - س^٣) = - د (س)

∴ الدالة فردية

الخلاصة

- لو سببنا إشارات الكل ← زوجية
 - غيرنا إشارات الكل ← فردية
 - سببنا شوية و غيرنا شوية ← ليست وليست
- لاحظ أن كل الدوال الثابتة تكون زوجية

$$\mathbf{4} \quad \mathbf{د (س)} = \mathbf{س + ٢}$$

المجال $]-\infty, 2[$

واضح إنها غير متماثلة حول محور الصادات

طبعاً هتسألني عرفت ازاي؟

أقولك أنا الأستاذ يا ولد عيب بص يا سيدي

المتماثلة حول محور الصادات بتكون شكلها كدة

$$[-\infty, \infty] \quad]-5, 5[$$

$$[-4, 4] \quad]-2, 2[$$

$[-س, س]$ كدة فهمت

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

$$\mathbf{3} \quad \mathbf{د (س)} = \mathbf{س + س^٢}$$

$$\mathbf{د (س)} = (\mathbf{س - س^٢}) + (\mathbf{س - س})$$

$$= \mathbf{س - س^٢}$$

∴ الدالة ليست فردية وليست زوجية

ابحث نوع الدوال التالية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك .

٣

$$(١) \quad د (س) = ٧$$

$$(٢) \quad د (س) = س + ٥$$

$$(٣) \quad د (س) = س + س^٢$$

$$(٤) \quad د (س) = س - س^٢$$

$$٥ \quad د (س) = \sqrt{س^٢ + ٢}$$

دي مجالها ح يعني متمثلة حول محور الصادات

$$د (س -) = \sqrt{س^٢ + ٢} = د (س) + ٢$$

$$\Delta \quad د (س -) = د (س)$$

∴ الدالة زوجية

بالنسبة للدوال المثلثية

بتعامل مع (- س) يعني زاوية في الربع الرابع

يعني : جتا (- س) = جتا س

جا (- س) = - جا س

ظا (- س) = - ظا س

$$\mathbf{V} \quad \mathbf{D} (S) = S^3 \mathbf{J} T A S$$

$$\begin{aligned} D (- S) &= (- S)^3 \mathbf{J} T A (- S) \\ &= - (S)^3 \times \mathbf{J} T A S = - S^3 \mathbf{J} T A S \end{aligned}$$

$$\Delta D (- S) = - D (S)$$

∴ الدالة فردية

$$\mathbf{1} \quad \mathbf{D} (S) = S \mathbf{J} A S$$

$$\begin{aligned} D (- S) &= (- S) \mathbf{J} A (- S) \\ &= - (S) \times \mathbf{J} A S = - S \mathbf{J} A S \end{aligned}$$

$$\Delta D (- S) = D (S)$$

∴ الدالة زوجية

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \text{ ، س} < \\ \text{س}^2 - \text{ ، س} > \end{array} \right\} = \text{د (س)}$$

$$\text{د (س)} = \text{جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س}$$

$$\Delta \text{ جا}^2 \text{ س} + \text{جتا}^2 \text{ س} = 1$$

$$\text{د (س)} = 1 \quad \text{د (-س)} = 1$$

وعلي فكرة الدالة الثابتة دائماً زوجية

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - \text{ ، س} < \\ \text{س}^2 \text{ ، س} > \end{array} \right\} = \text{د (-س)}$$

غيرنا كل الإشارات

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 \text{ ، س} < \\ \text{س}^2 - \text{ ، س} > \end{array} \right\} = \text{د (-س)}$$

$$\Delta \text{ د (-س)} = \text{د (س)}$$

∴ الدالة زوجية

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^2 - \text{ ، س} > \\ \text{س}^2 \text{ ، س} < \end{array} \right\} = \text{د (-س)}$$

هنطلع الأكبر فوق بالفرع كله

مثال ٣ :

١ إذا كانت د (س) زوجية في [٢ ، ب]
فإن:

$$٢ - = ب \text{ أو } ب - = ٢$$

٢ [٢ ، ٢] فإن: ٢ - = ٢

٣ [ب ، ٥ -] فإن: ب = ٥

٤ [ب ، ٢] وكان | ٢ | = ٤ فإن:

ب = ٤ عارف ليه؟

لأنها [٤ ، ٤ -] صح؟

٥ إذا كانت د (س) زوجية فأختصر

$$\frac{٤ د (س) - ٢ د (-س)}{٥ د (س) - ٣ د (-س)}$$

$$ب د (-س) = د (س)$$

$$١ = \frac{٢ د (س)}{٢ د (س)} = \frac{٤ د (س) - ٢ د (س)}{٥ د (س) - ٣ د (س)}$$

٦ إذا كانت الدالة زوجية فإنها متماثلة حول
المستقيم

س = صفر ← محور الصادات

٧ إذا كانت الدالة زوجية فإن

$$..... = د (٢) + د (٢ -)$$

$$د (٢) = د (٢) + د (٢)$$

أو ٢ د (٢ -)

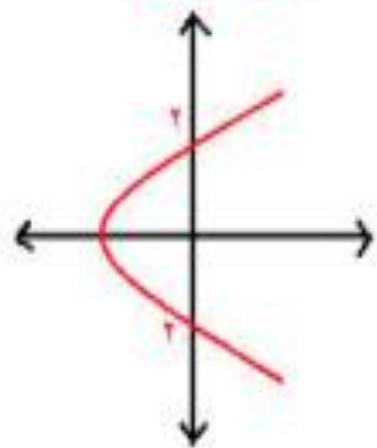
٨ إذا كانت الدالة فردية فإن

$$د (٢ -) = - د (٢)$$

$$..... = د (٢) + د (٢ -)$$

$$د (٢) - د (٢) = صفر$$

١٠ المنحني المرسوم متماثل حول المستقيم



(١) $s = 0$ صفر

(٢) $s = 0$ صفر

(٣) $s = 2$

(٤) $s = -2$

هو متماثل حول محور السينات

يعني $s = 0$

و علي فكرة لا يمثل دالة بسبب اختبار الخط الراسي

حد فاكرها ؟

٩ الدالة

$s < 0$ عندما $s < 0$

$s > 0$ عندما $s > 0$

متماثلة حول.... اختر

(٢، ٠)

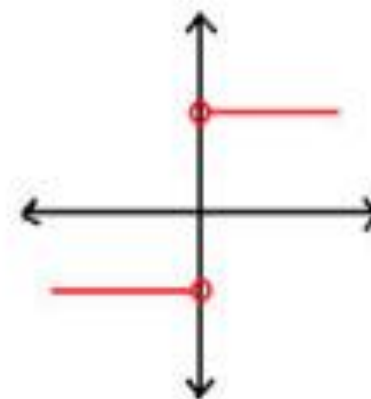
(-٢، ٠)

(٢، -٢)

(٠، ٠)

علي فكرة لو جيت ترسمها هتلاقيها فردية يعني

متماثلة حول نقطة الأصل (٠، ٠)



الجزء الثاني من الدرس
الدوال الأحادية

علمي فقط

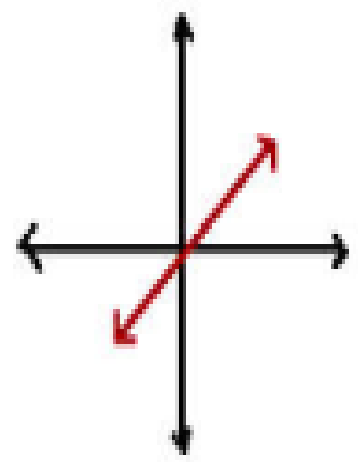
سؤال : ازاى تعرف إن الدالة أحادية ؟

من الرسم

١

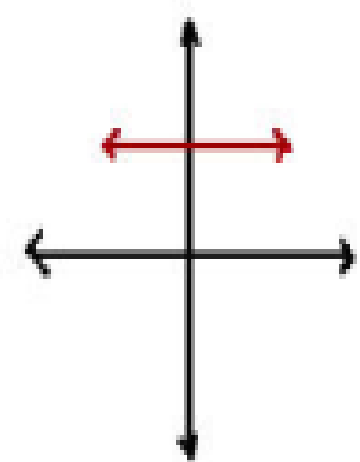
إذا وجد خط أفقي (يوازي محور السينات)
يقطع منحنى الدالة في أكثر من نقطة فإن الدالة
ليست أحادية .

١



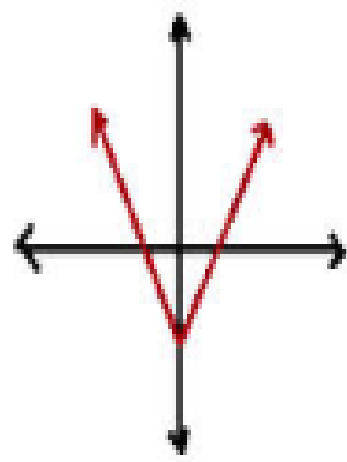
أحادية

٢



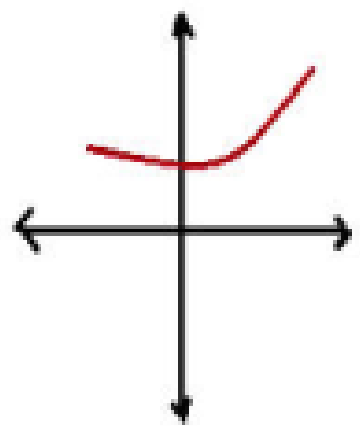
ليست أحادية

٣



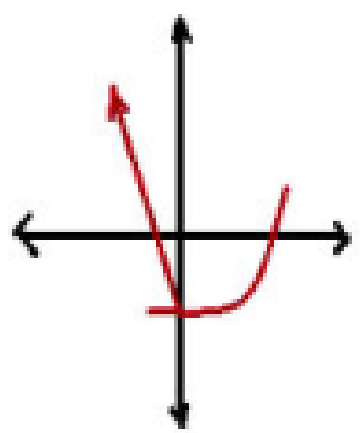
ليست أحادية

٤



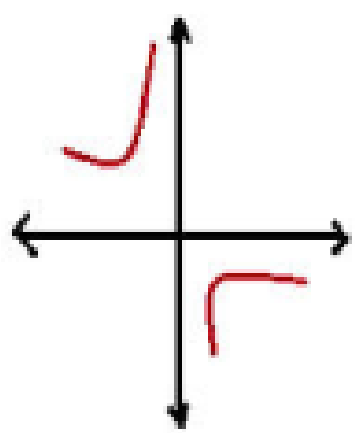
ليست أحادية

٥



ليست أحادية

٦



ليست أحادية

(١) هتجيب د (٢) ، د (ب) وتساويهم ببعض لو كان $٢ = ب$ يبقي أحادية .

(٢) لو طلع $٢ = ± ب$ فإن الدالة ليست أحادية .

إذا وجد عنصران في مجال الدالة لهما نفس الصورة فإن الدالة ليست أحادية

كل الدوال الزوجية ليست أحادية

مثال ٢ : حدد مين من الدوال دي أحادية ومين ليست أحادية :

١ د (س) = ٢س - ٥

لأي ٢ ، ب ∃ للمجال

د (٢) = ٢ - ٢ = ٥ ، د (ب) = ٢ - ب = ٥

بوضع د (٢) = د (ب)

∴ ٢ - ٢ = ٥ - ب

٢ = ٢ - ب

∴ ب = ٠

∴ الدالة أحادية

٢ د (س) = ٢س + ٢

لأي ٢ ، ب ∃ للمجال

د (٢) = ٢ + ٢ = ٤ ، د (ب) = ٢ + ب = ٤

بوضع د (٢) = د (ب)

∴ ٢ + ب = ٢ + ٢

بأخذ الجذر التربيعي ∴ ب = ٢

∴ ±√٢ = ٢

∴ الدالة ليست أحادية

$$\frac{5 - 3s}{3 + 4s} = d(s) \quad \text{ع}$$

لأي $p, b \in \mathbb{R}$ للمجال

$$\frac{5 - 3b}{3 + 4b} = d(b), \quad \frac{5 - 3p}{3 + 4p} = d(p)$$

بوضع $d = d(p) = d(b)$

$$\frac{5 - 3b}{3 + 4b} = \frac{5 - 3p}{3 + 4p} \quad \therefore$$

$$(5 - 3b)(3 + 4p) = (3 + 4b)(5 - 3p)$$

$$= 15 - 20b - 9p + 12bp$$

$$15 - 9b + 12bp - 20b = 15 - 9p + 12bp - 20p$$

$$\therefore 15 - 29b = 15 - 29p$$

خلى p في ناحية و b في ناحية

$$-29b = -29p$$

$$29 \div \quad 29 \div \quad 29 \div$$

$$\therefore b = p \quad \therefore \text{الدالة أحادية}$$

$$\frac{2}{1 + 3s} = d(s) \quad \text{ح}$$

لأي $p, b \in \mathbb{R}$ للمجال

$$\frac{2}{1 + 3b} = d(b), \quad \frac{2}{1 + 3p} = d(p)$$

بوضع $d = d(p) = d(b)$

$$\frac{2}{1 + 3b} = \frac{2}{1 + 3p} \quad \therefore$$

Δ البسط = البسط

\therefore المقام = المقام صح؟

$$1 + 3b = 1 + 3p$$

$$3b = 3p$$

$$\therefore b = p$$

\therefore الدالة أحادية

٦ ضع (✓) أمام الدالة الأحادية

(×) (١) د (س) = جتا س

(×) (٢) د (س) = س^٢

(✓) (٣) د (س) = س^٢

(×) (٤) د (س) = س^٤ + س^٢

(×) (٥) د (س) = |س|

(✓) (٦) د (س) = $\frac{١}{س}$

٥ د (س) = س^٢ + س

لأي $٢, ب \in$ للمجال

د (٢) = $٢ + ٢٢ = (٢) د$ ، د (ب) = $ب + ٢ب$

بوضع د (٢) = د (ب)

$\therefore ٢ + ٢٢ = ب + ٢ب$

$٠ = ٢٢ - ٢ب - ب + ٢$

$٠ = (٢٢ - ٢ب) + (٢ - ب)$

$٠ = (٢ - ب) + (٢ + ب)(٢ - ب)$

$٠ = (٢ - ب)(١ + ب + ٢)$

إما $٢ - ب = ٠$ ومنها $ب = ٢$

أو $١ + ب + ٢ = ٠$ ومنها $ب = -٣$

\therefore لها قيمتان ٢ \therefore الدالة ليست أحادية

الدرس الرابع أطراف الدوال

مهم

إذا كانت d معرفة علي الفترة $[٢ ، ١]$ ب

و كانت $١ س ، ٢ س$ للمجال \exists

إذا كان :

① $١ س < ٢ س ، d (٢ س) < d (١ س)$

فإن الدالة تكون تزايدية

② $١ س < ٢ س ، d (٢ س) > d (١ س)$

فإن الدالة تكون تناقصية

③ $١ س < ٢ س ، d (٢ س) = d (١ س)$

فإن الدالة تكون ثابتة

الخلاصة

① **المجال :** بنجبيه من علي محور السينات

② **المدى :** بنجبيه من علي محور الصادات

③ **الأطراف :** بنجبيه من علي محور السينات

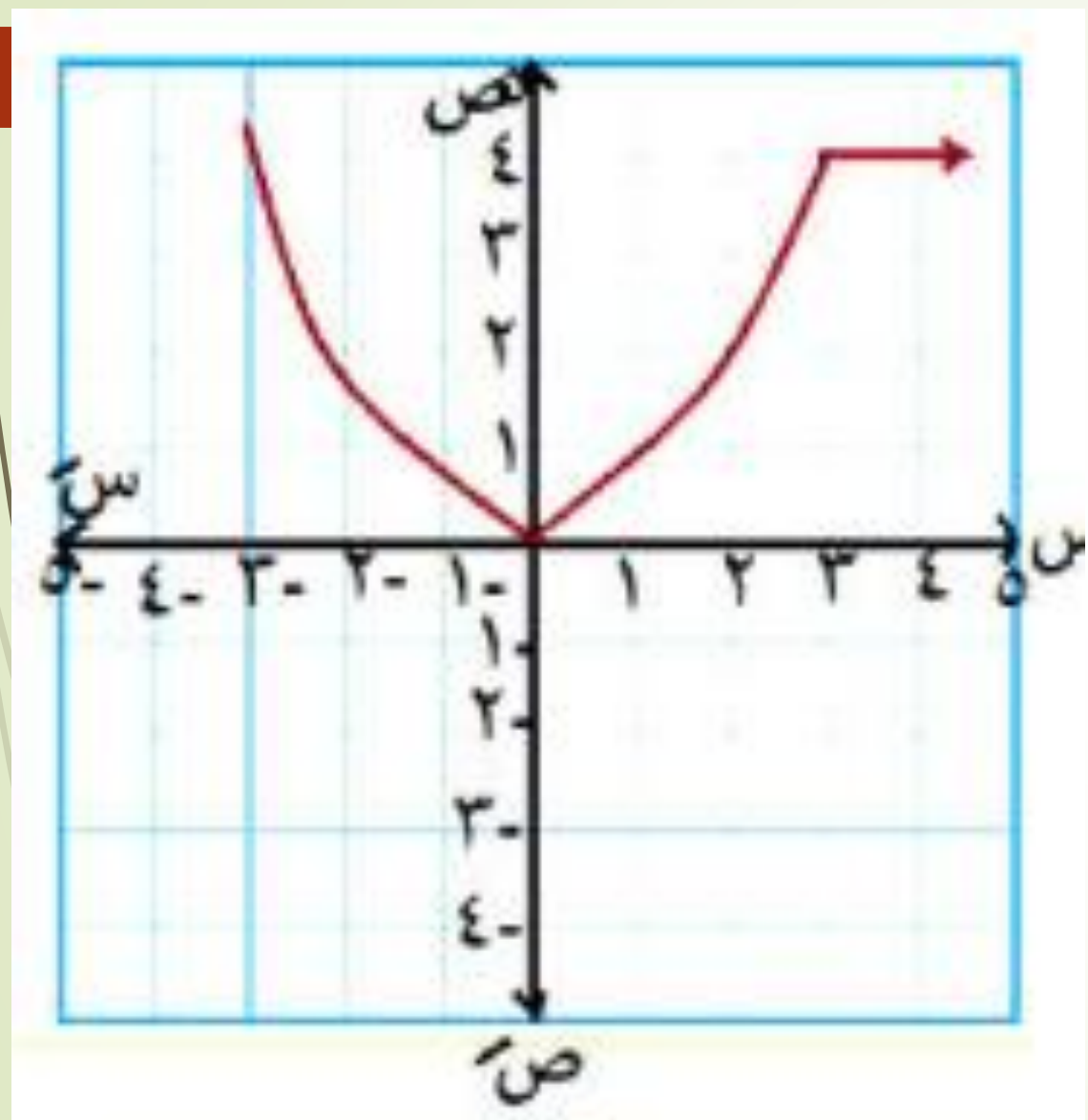
بداية من اليسار متجهين إلي اليمين

الدالة تطلع ← تزايدية

تنزل ← تناقصية

تثبت ← ثابتة

مثال ١ : عين المجال والمدى والنوع و الأطراد لكل مما يلي :



المجال = ح

المدى :] 0 ، ∞]

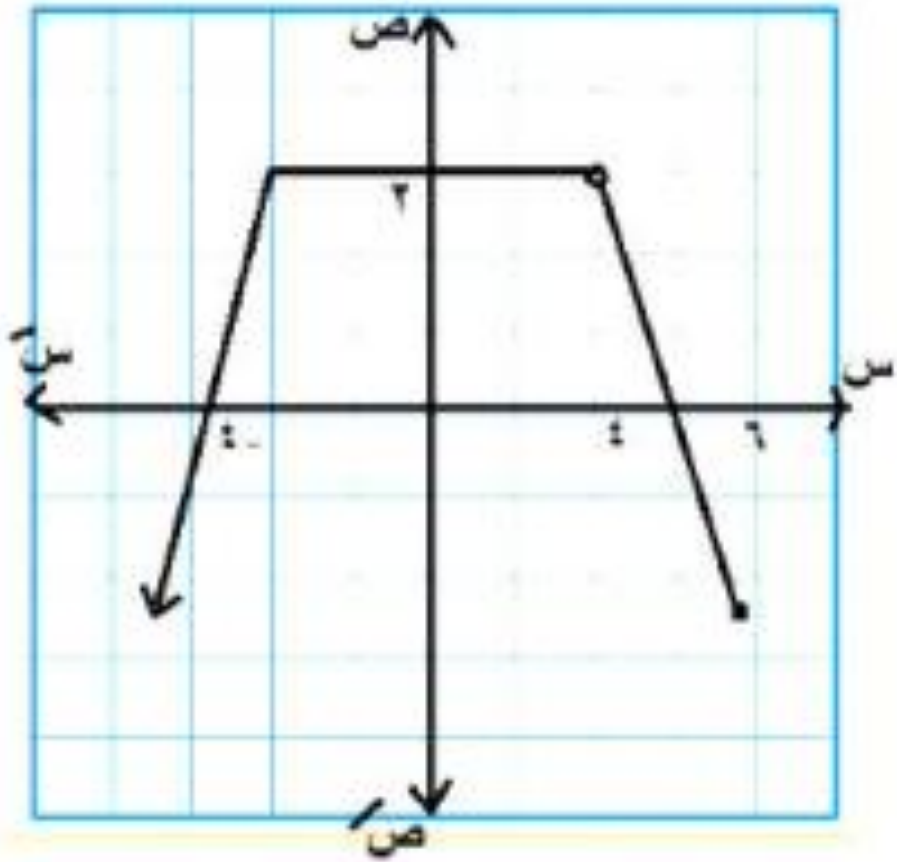
النوع : ليست زوجية
وليس فردية
و ليست أحادية

تناقصية [- ∞ ، 0]

تزايدية [0 ، 2]

ثابتة [2 ، ∞]

الأطراد :



$$\{4\} - [6, \infty -]$$

المجال

$$[2, \infty - [$$

المدى :

: ليست زوجية
وليس فردية
و ليست أحادية

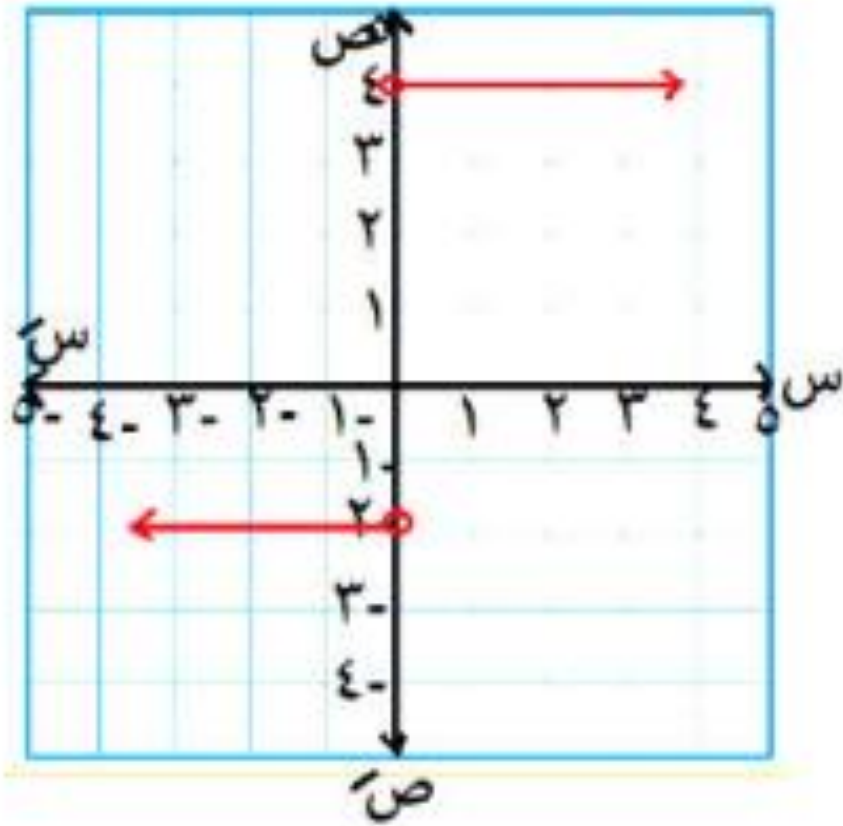
النوع

$$] 4 - , \infty - [$$

الأطراف

$$] 4 , 4 - [$$

$$] 6 , 4 [$$



ح - { 0 }

المجال =

{ -2 ، 4 }

المدى :

: ليست زوجية
وليس فردية
و ليست أحادية

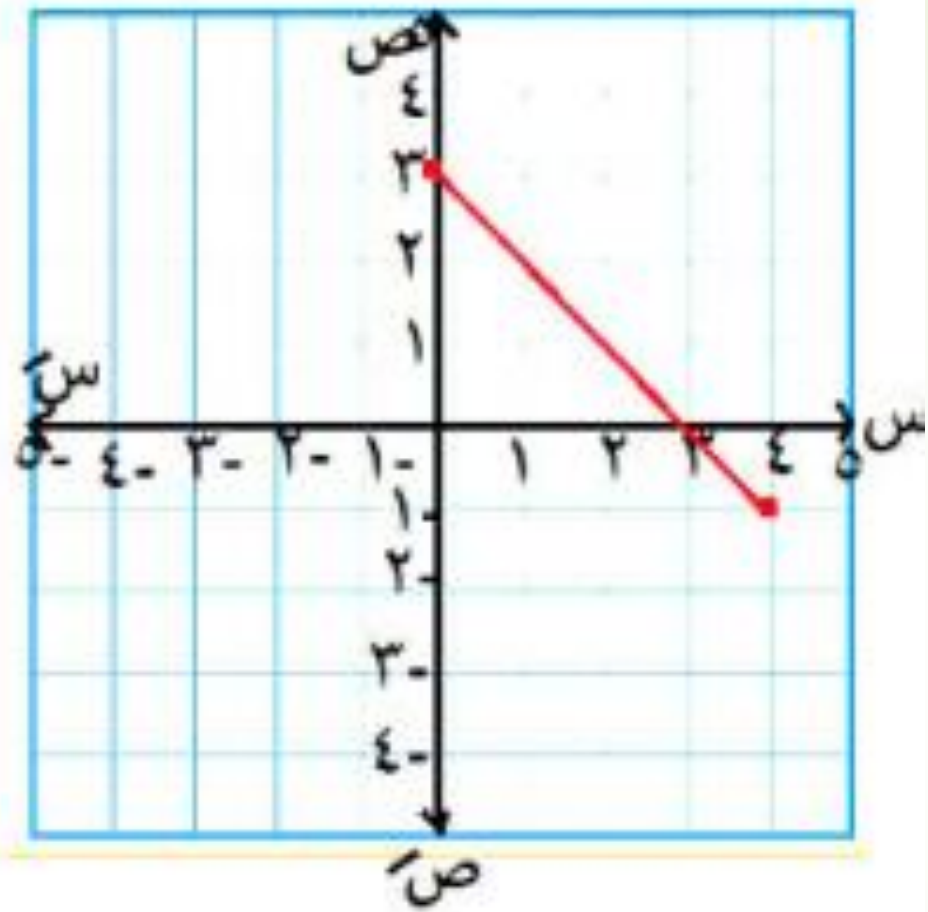
النوع

ثابتة [-∞ ، 0]

ثابتة [0 ، ∞]

أي أنها ثابتة علي المجال

الأطراف :



$[0, 3]$

المجال =

$[-1, 3]$

المدى :

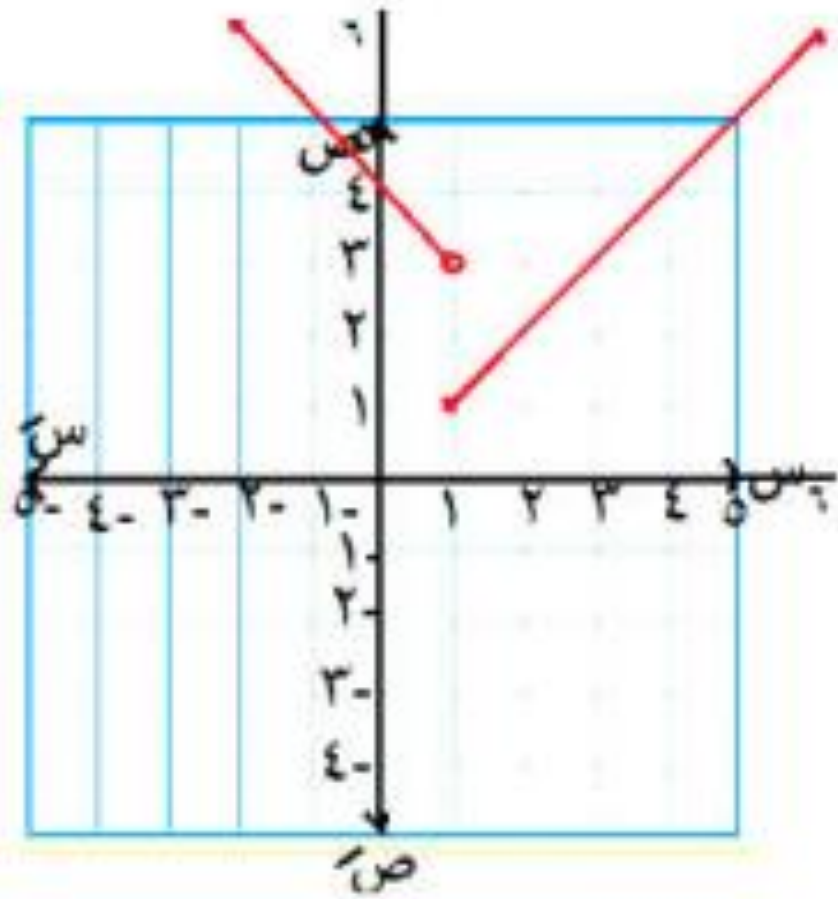
ليست زوجية
وليست فردية
أحادية

النوع :

تناقصية على المجال

الأطراد :

أو تناقصية في $[0, 3]$



٥ ارسم الشكل البياني للدالة

إذا كان د: $[-2, 6] \leftarrow ح$

$$\left. \begin{array}{l} 1 > س \geq 2- \\ 6 \geq س \geq 1 \end{array} \right\} د (س) =$$

وحدد الحاجات اللي أنت عارفها

النوع :

الحل

ليست زوجية
وليست فردية
وليست أحادية

س	ص	س	ص
٦	٣	١	٤
٦	٣	١	٤

الأطراف :

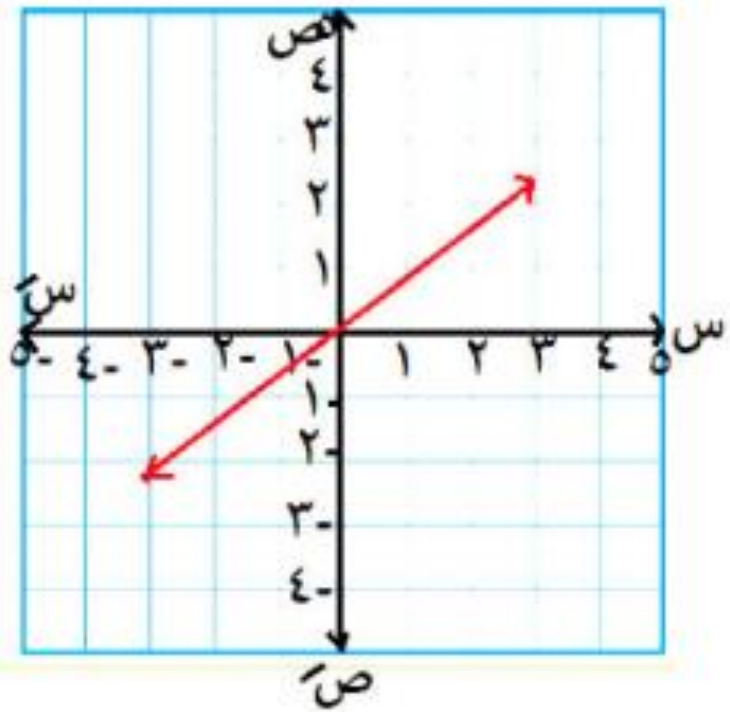
تناقصية $[-2, 1]$
تزايدية $[1, 6]$

المدى :

$[1, 6]$

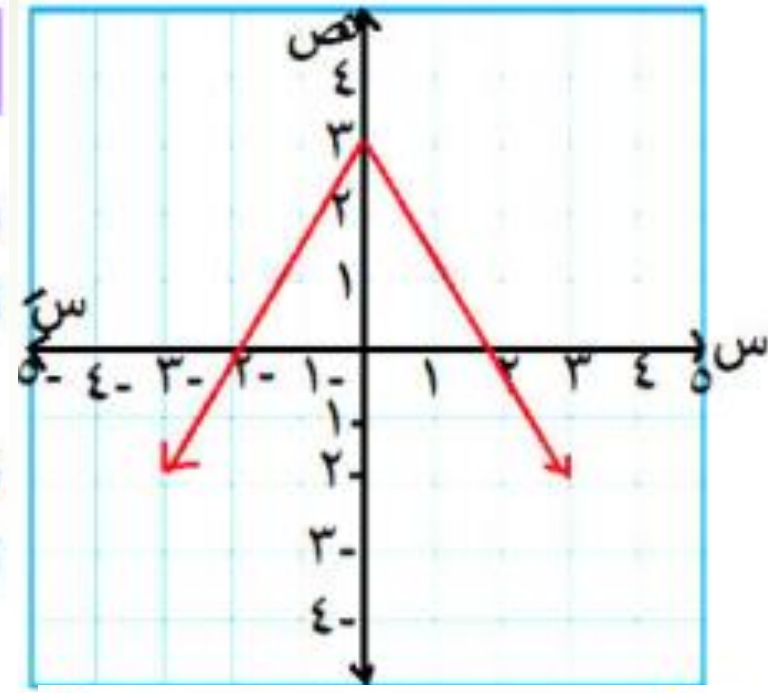
المجال =

$[-2, 6]$



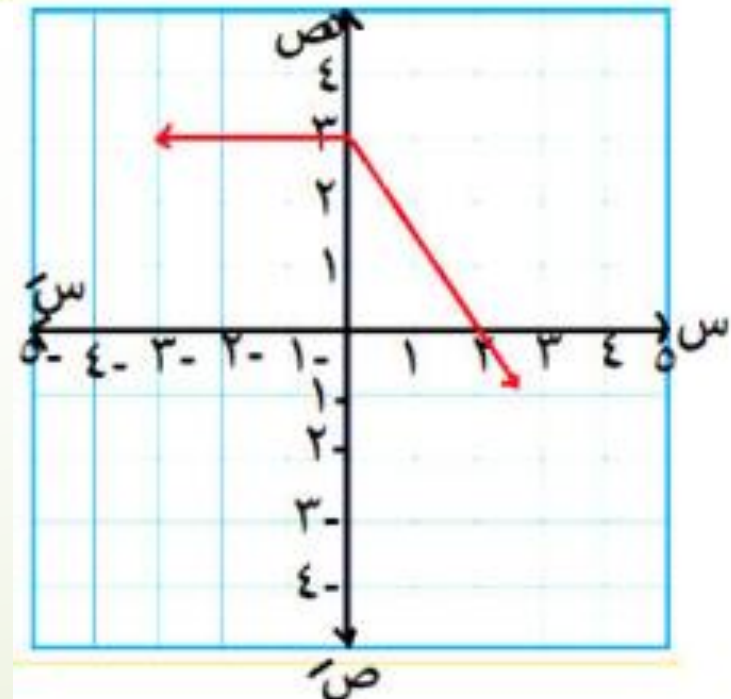
٣

المجال :
 المدي :
 النوع :
 الأطراد :



١

المجال :
 المدي :
 النوع :
 الأطراد :



٢

المجال :
 المدي :
 النوع :
 الأطراد :

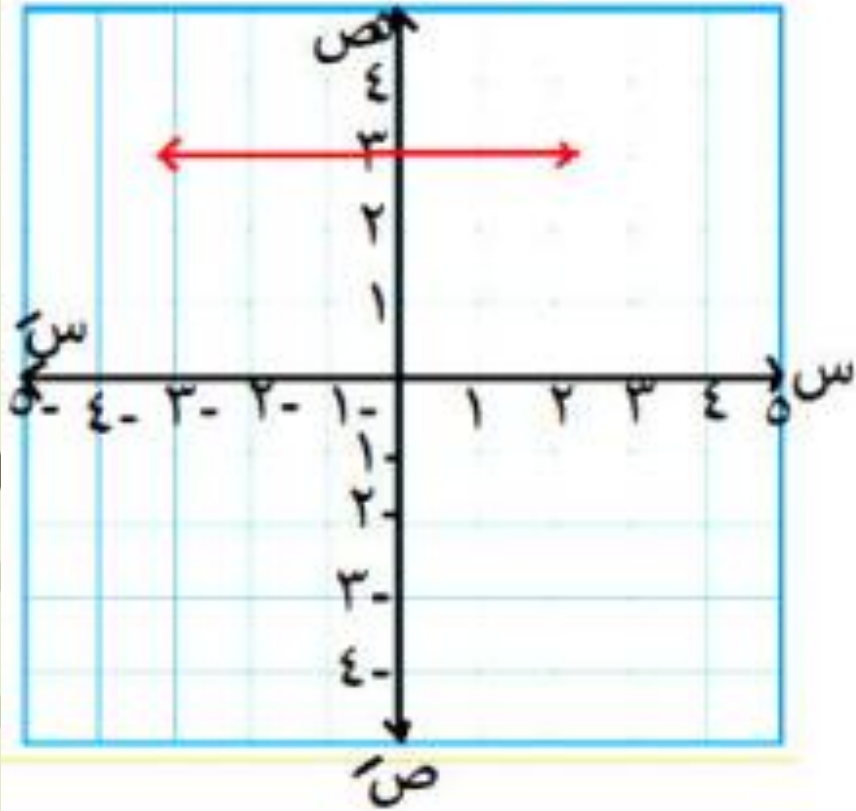
٤ ارسم

$$\left. \begin{array}{l} 2 - س > 1 - س \geq 2 \\ س \geq 2 - س > 0 \end{array} \right\} = (س)$$

وعين المجال - المدي - النوع - الأطراد

الدرس الخامس التمثيل البياني للدوال

دوال كثيرات الحدود



المجال = ح

المدى : { 3 }

النوع :

زوجية

لتماثلها حول

محور الصادات

و ليست أحادية

أولاً : الدالة الثابتة

د(س) = ٣

تمثل بخط مستقيم يوازي محور السينات ويقطع

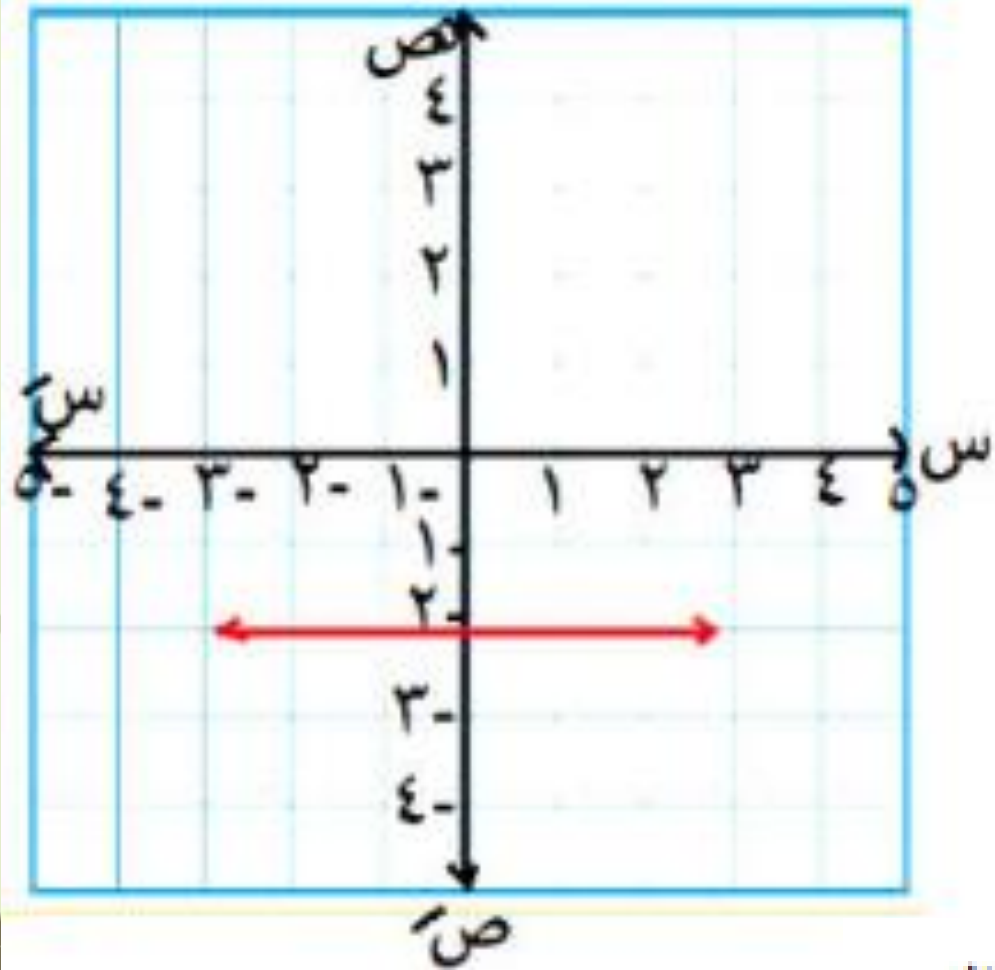
محور الصادات في (٣ ، ٠)

مثل د(س) = ٣

مثل ١

الأطراف : ثابتة علي المجال

مثال ٢ : مثل بيانياً د (س) = -٢



المجال = ح

المدى : { -٢ }

النوع : زوجية

لتماثلها حول

محور الصادات

و ليست أحادية

الأطراد : ثابتة علي المجال

ثانياً: الدالة الخطية

دالة الدرجة الأولى $P = (س) + ب$

تقطع محور الصادات في $(ب, ٠)$

وتقطع محور السينات $(٠, \frac{-ب}{١})$

مثال ٣ : مثل د (س) = س

المجال = ح

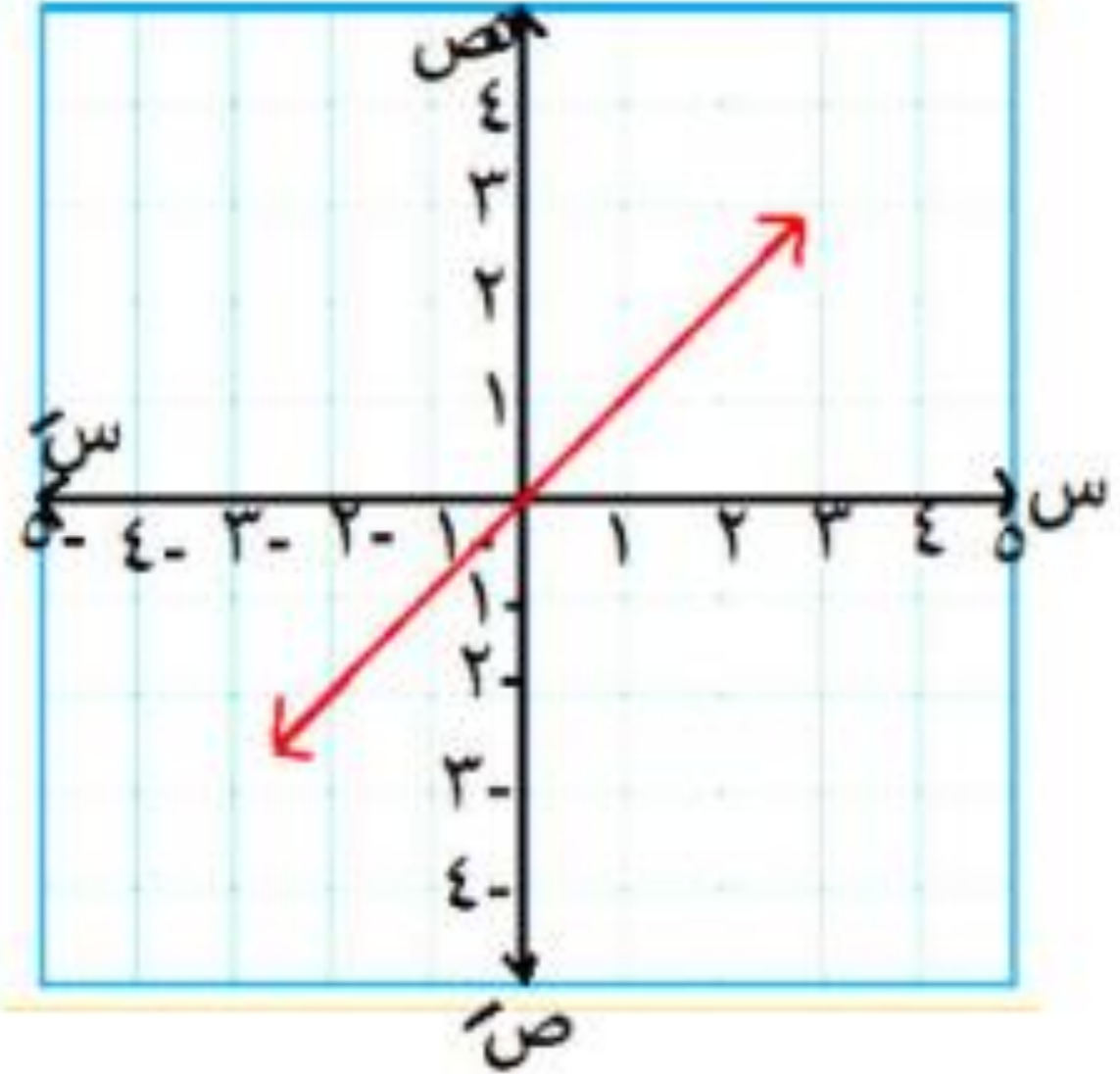
المدى : ح

النوع : فردية

لتماثلها حول

نقطة الأصل

و أحادية



الأطراف : تزايدية علي المجال

الأطراف : تناقصية على المجال

المجال = ح

المدى : ح

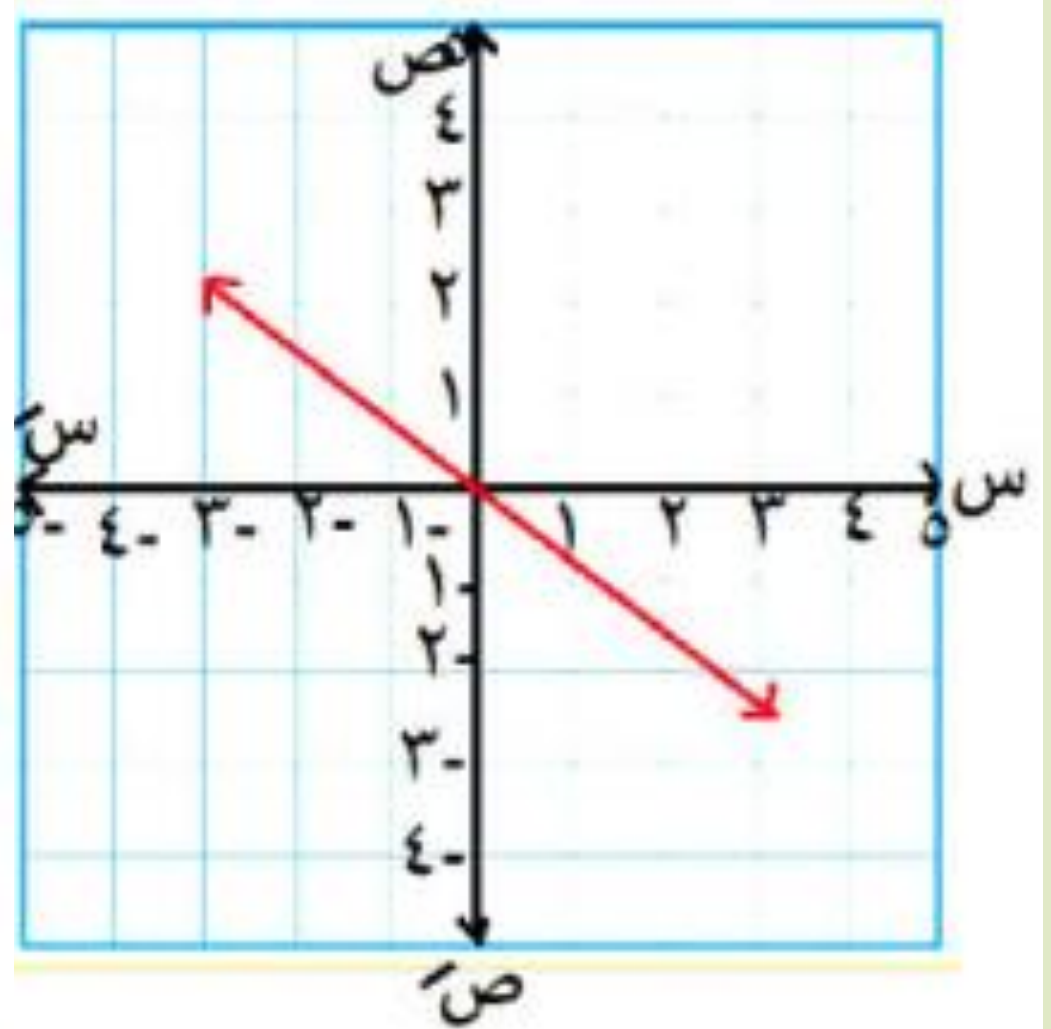
النوع : فردية

لتماثلها حول

نقطة الأصل

و أحادية

مثال ٤ : مثل د(س) = - س



دالة الدرجة الأولى د(س) = ٢س + ب

تقطع محور الصادات في (٠ ، ب)

وتقطع محور السينات (٠ ، $-\frac{ب}{٢}$)

مثال ٥ : مثل د(س) = ٢س + ٢

يقطع الصادات في (٢ ، ٠)

و يقطع السينات في (٠ ، -٢)

الأطراف : تزايدية علي المجال

المجال = ح

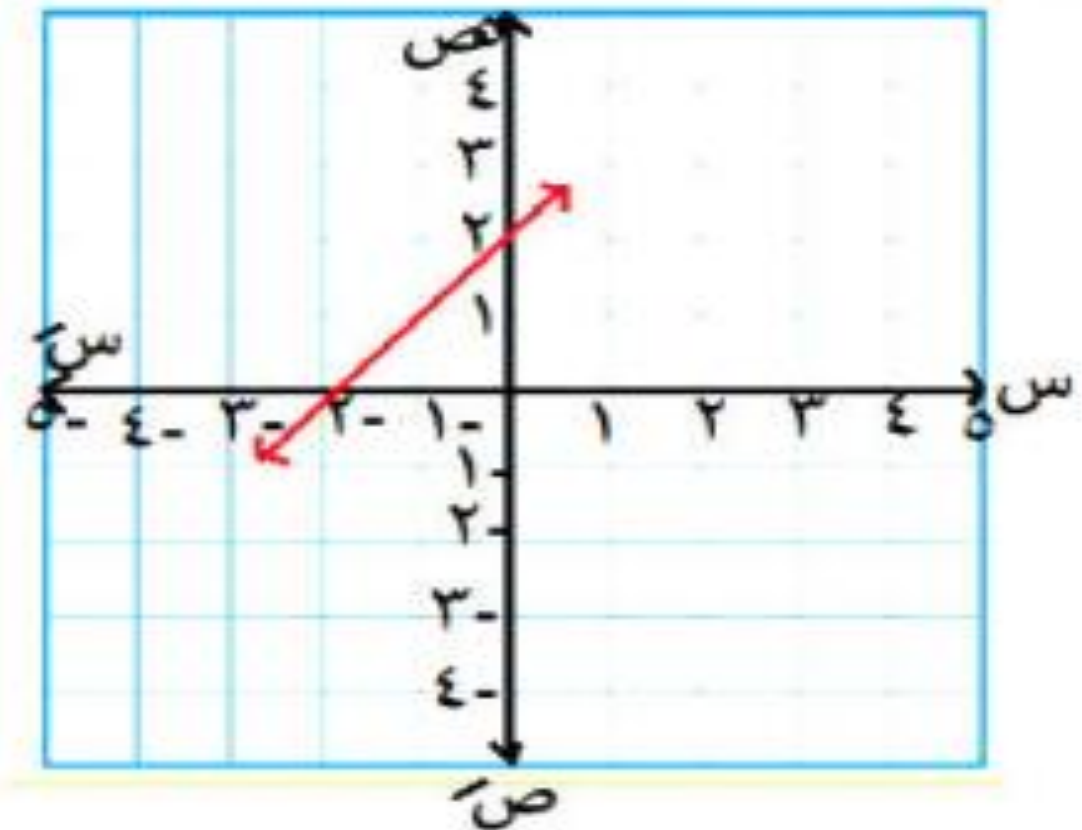
المدى : ح

النوع :

ليست زوجية

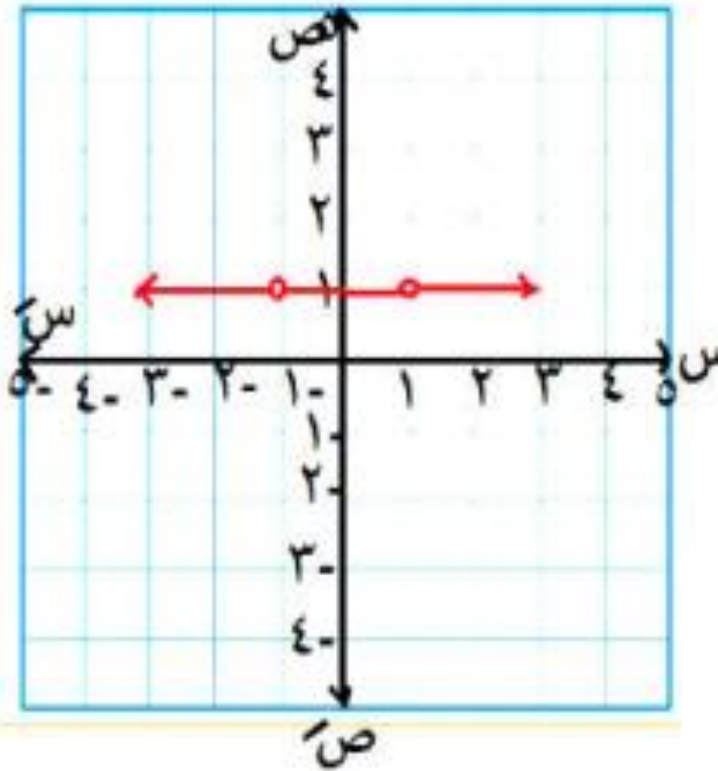
وليست فردية

أحادية



$$\frac{2 - s^2}{1 - s} = \text{مثل بيانياً د(س)}$$

الحل



$$\frac{2 - s^2}{1 - s} = \text{د(س)}$$

المجال : ح - } ± 1
د(س) = 2

المدى : { 2 }

النوع :
زوجية

لتمائلها حول
محور الصادات

الأطراد : ثابتة
علي المجال

مثال ٦ : مثل بيانياً د(س) = -س + 1

الحل

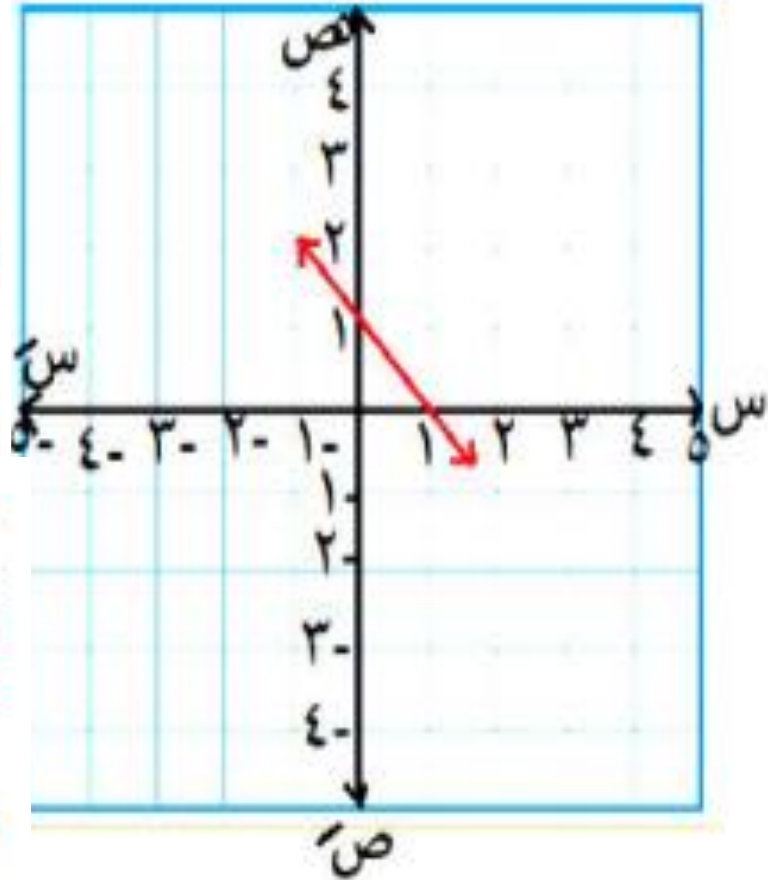
يقطع الصادات في (1, 0)
ويقطع السينات في (0, 1)

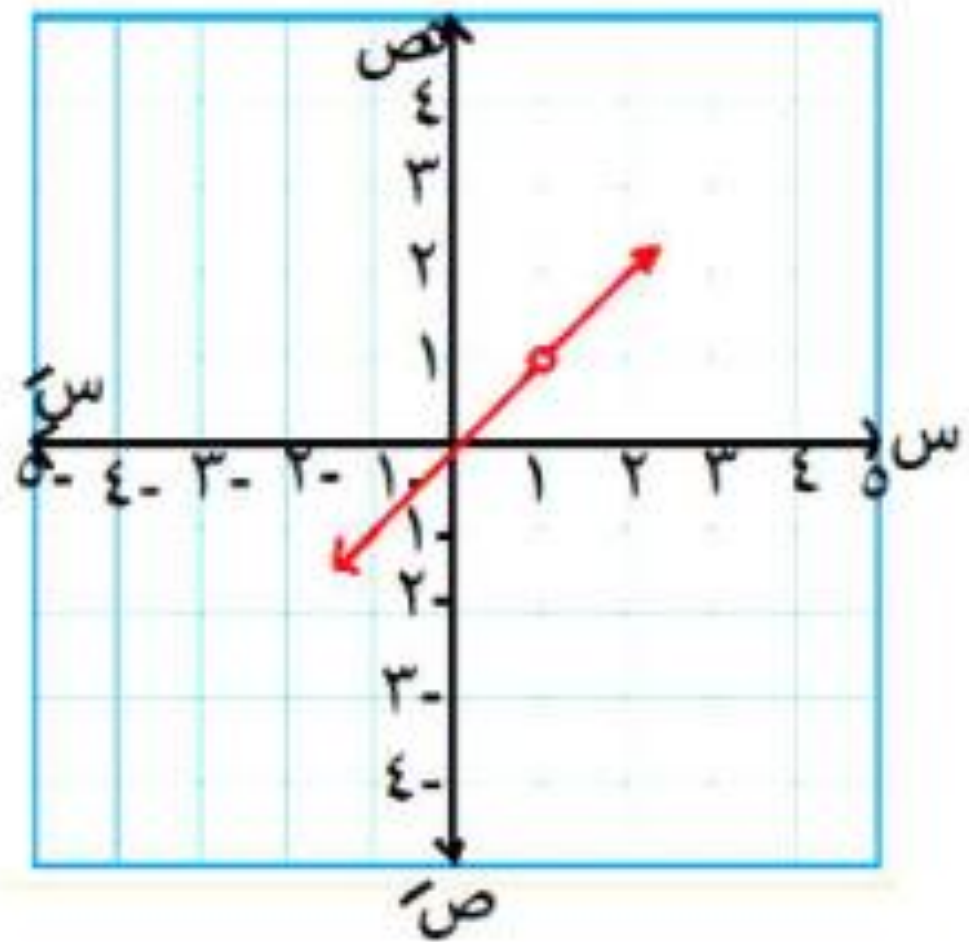
المجال :

المدى :

النوع :

الأطراد :





$$\frac{س^2 - س}{س - 1} = \text{مثل بيانياً د(س)}$$

$$د(س) = س$$

$$\frac{س(س - 1)}{س - 1} = د(س)$$

المجال =

ح - {1}

المدى :

ح - {1}

النوع :

ليست زوجية
وليست فردية
أحادية

الأطراف : تزايدية علي ح - {1}

٢ مثل بيانياً كلاً من الدوال ثم أوجد المجال -
المدى - النوع - الأطراد :

$$(٥) د (س) = -س + ١$$

$$(١) د (س) = ١$$

$$(٦) د (س) = ٢س$$

$$(٢) د (س) = -١$$

$$(٧) د (س) = س + ٢$$

$$(٣) د (س) = ٢$$

$$(٨) د (س) = ٣س - ١$$

$$(٤) د (س) = س$$

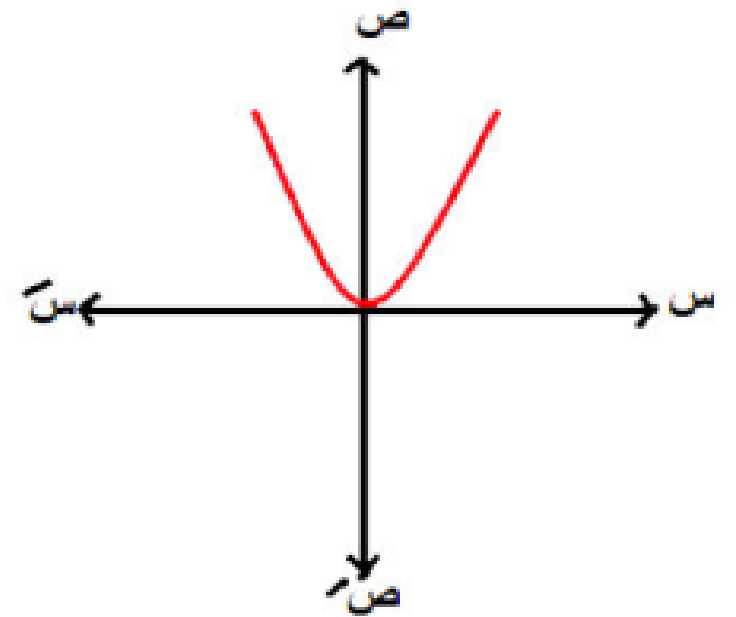
ثالثاً: الدالة التربيعية

مثل بيانياً الدوال التالية
موضحاً المجال والمدى والنوع
والأطراد :

الفكرة
الأولى

$$د (س) = س^2$$

١



المجال = ح

المدى :

$$] ٠ ، \infty [$$

النوع :

زوجية

وليست

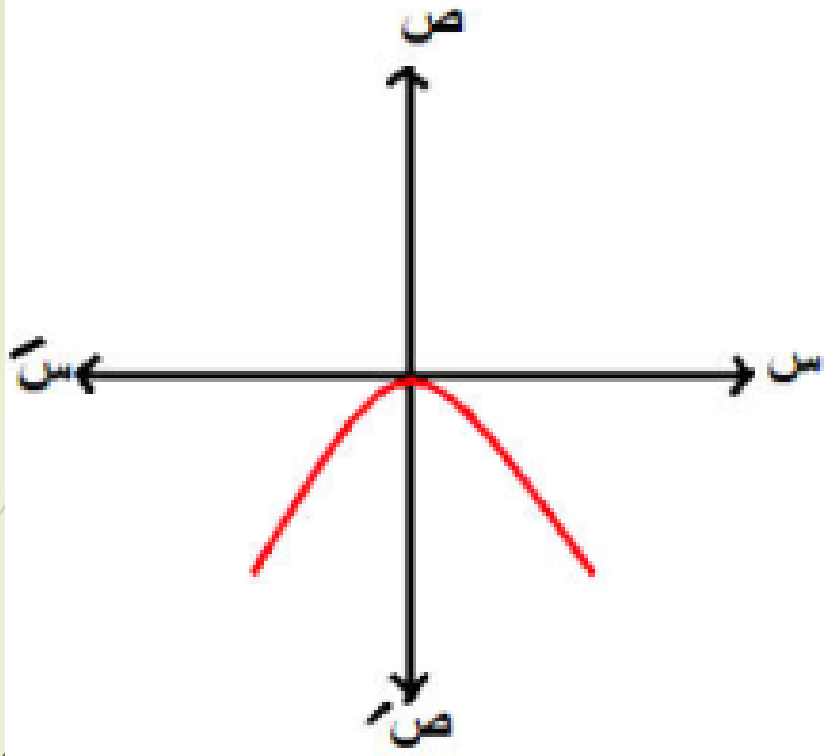
أحادية

الأطراد : تناقصية] - \infty ، ٠ [

تزايدية] ٠ ، \infty [

٢

$$d(s) = -s^2$$



المجال = ح

المدى :

$]-\infty, 0]$

الأطراف : تزايدية $]-\infty, 0]$

تناقصية $]0, \infty[$

النوع :

زوجية وليست

أحادية

لاحتفظ

ملاحظة:

مفتوح لأعلي موجب

مفتوح لأسفل سالب

إذا كان معامل س ٢

إذا كان معامل س ٢

$$د (س) = (س + ٢) + ج$$

رأس المنحني (ج ، س - ٢)

الفكرة
الثانية

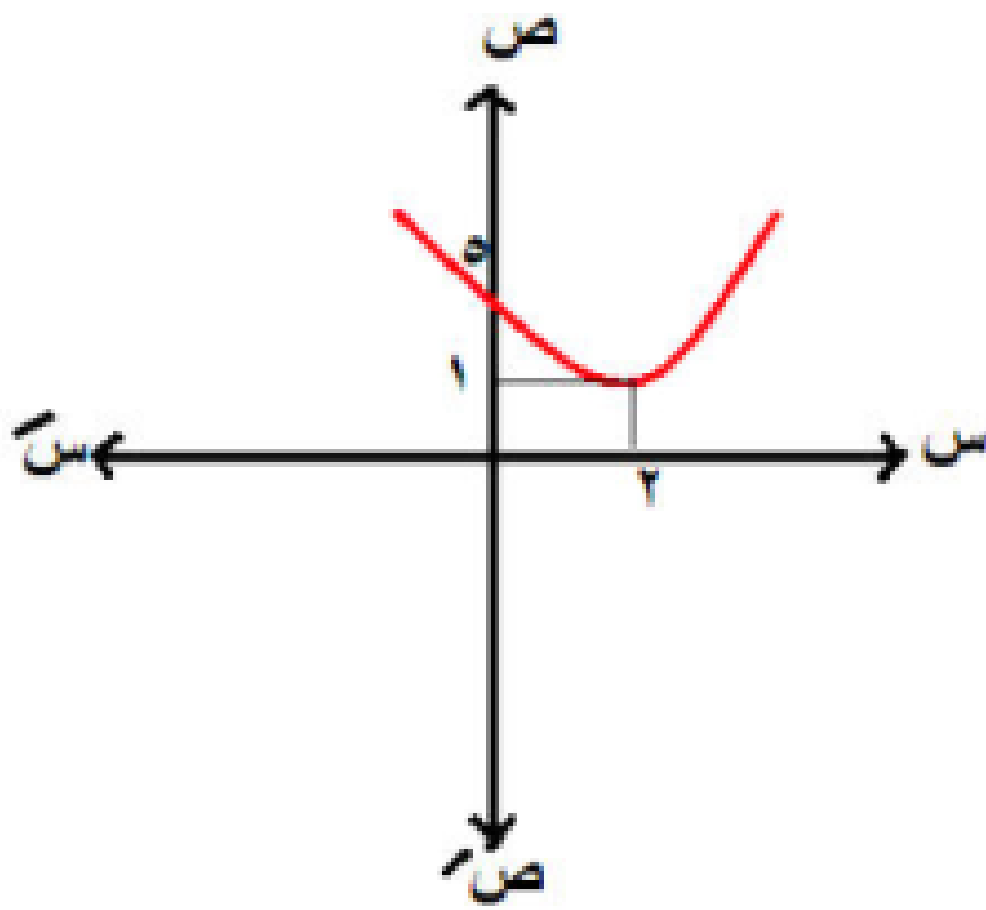
مثال ٩ : مثل بيانياً كلاً مما يلي

$$د (س) = (س - ٢) + ١$$

١

رأس المنحني

(١ ، ٢)



المجال = ح
المدى :

$]-\infty, 1]$

النوع :

ليست زوجية

وليست فردية

وليست أحادية

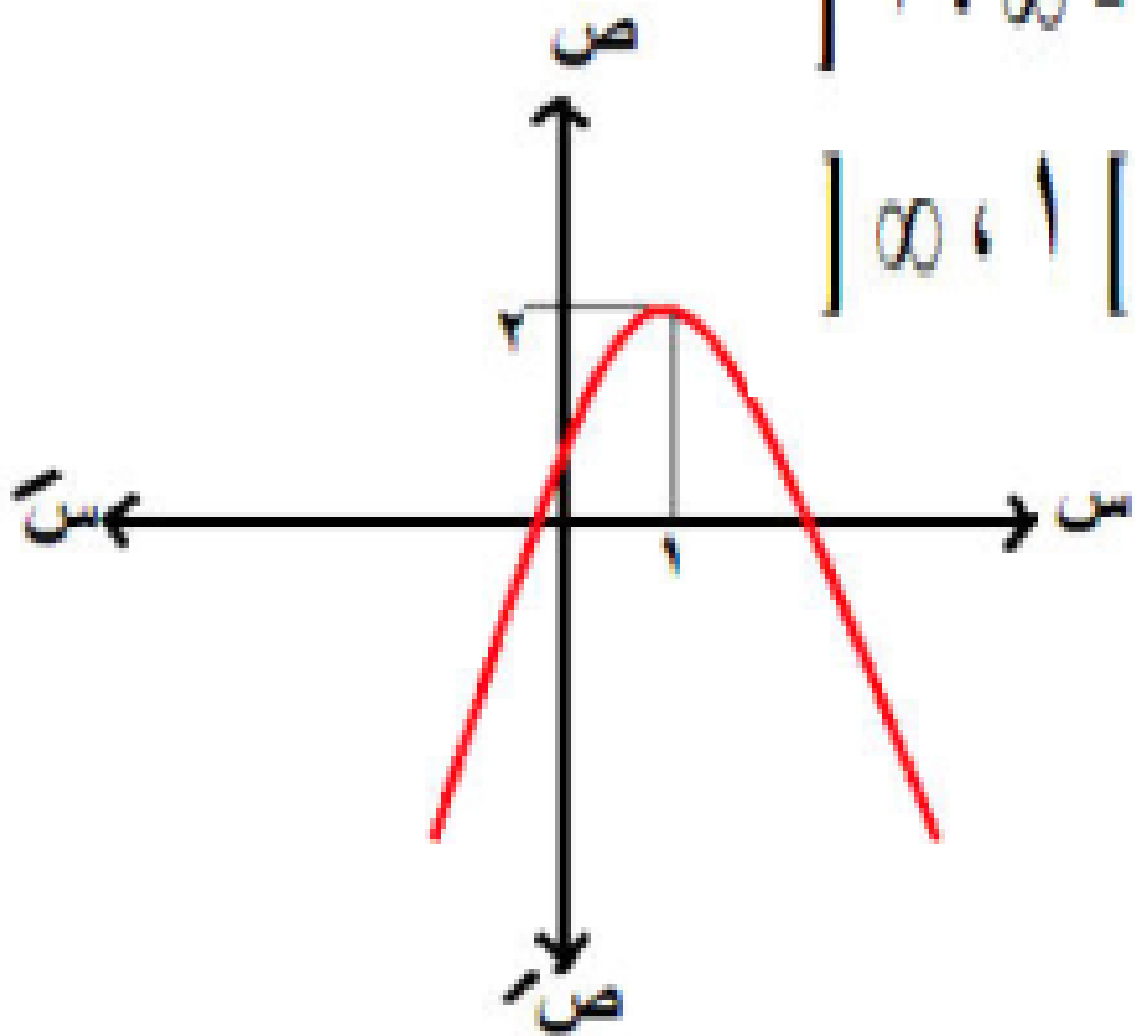
الأطراف : تناقصية $]-\infty, 1]$

تزايدية $]1, \infty[$

٢

$$d(s) = (s - 1)^2 + 2$$

رأس المنحني =
(١، ٢) مفتوح
لأسفل



الأطراف : تزايدية | ١، ∞ -

تناقصية | ∞، ١

المجال = ح

المدى :

| - ∞، ٢ |

التوقع :

ليست زوجية

وليست فردية

ملحوظة هامة

من خصائص الدالة التربيعية

$$^2(1-s) = ^2(s-1) = ^2(1+s)$$

$$^3 \text{ د (س) } = (س - ٢) - ^2(٢ + س) - ١$$

$$\text{د (س) } = (س - ٢) - ^2(٢ + س) - ١$$

المجال = ح

المدى :

$$| \infty , ١ - |$$

رأس المنحني

$$(١ - , ٢)$$

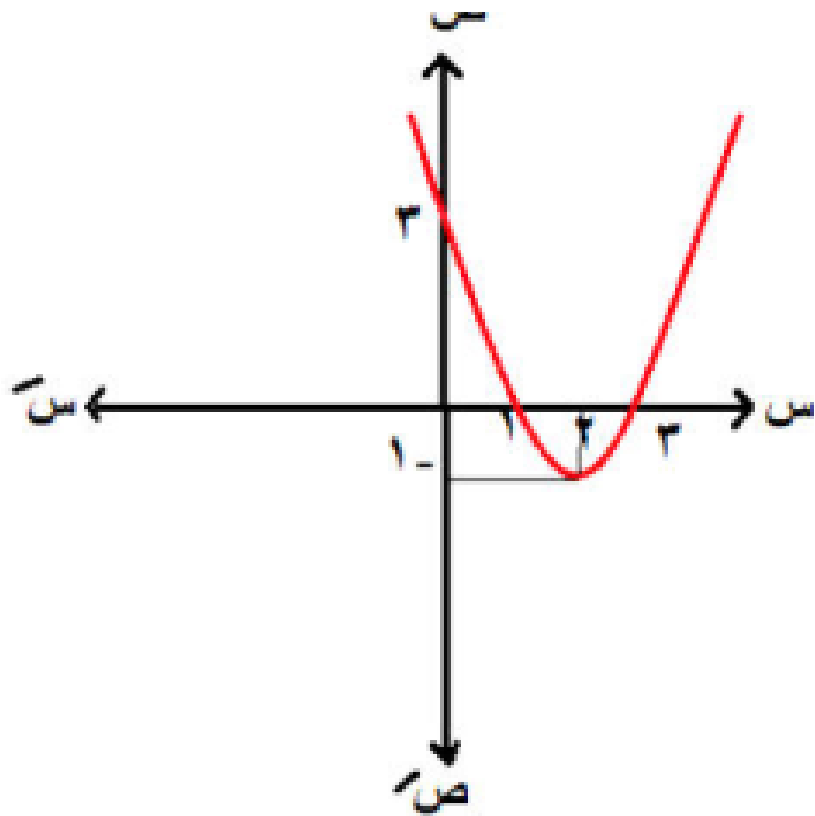
مفتوح لأعلي

النوع :

ليست زوجية
وليست فردية
وليست أحادية

الأطراد : تناقصية | - ∞ , ٢ |

تزايدية | ٢ , ∞ |



٤ د (س) = (س - ٢)²

د (س) = (س - ٢)² + ٠

رأس المنحني
(٠، ٢)

مفتوح لأعلي

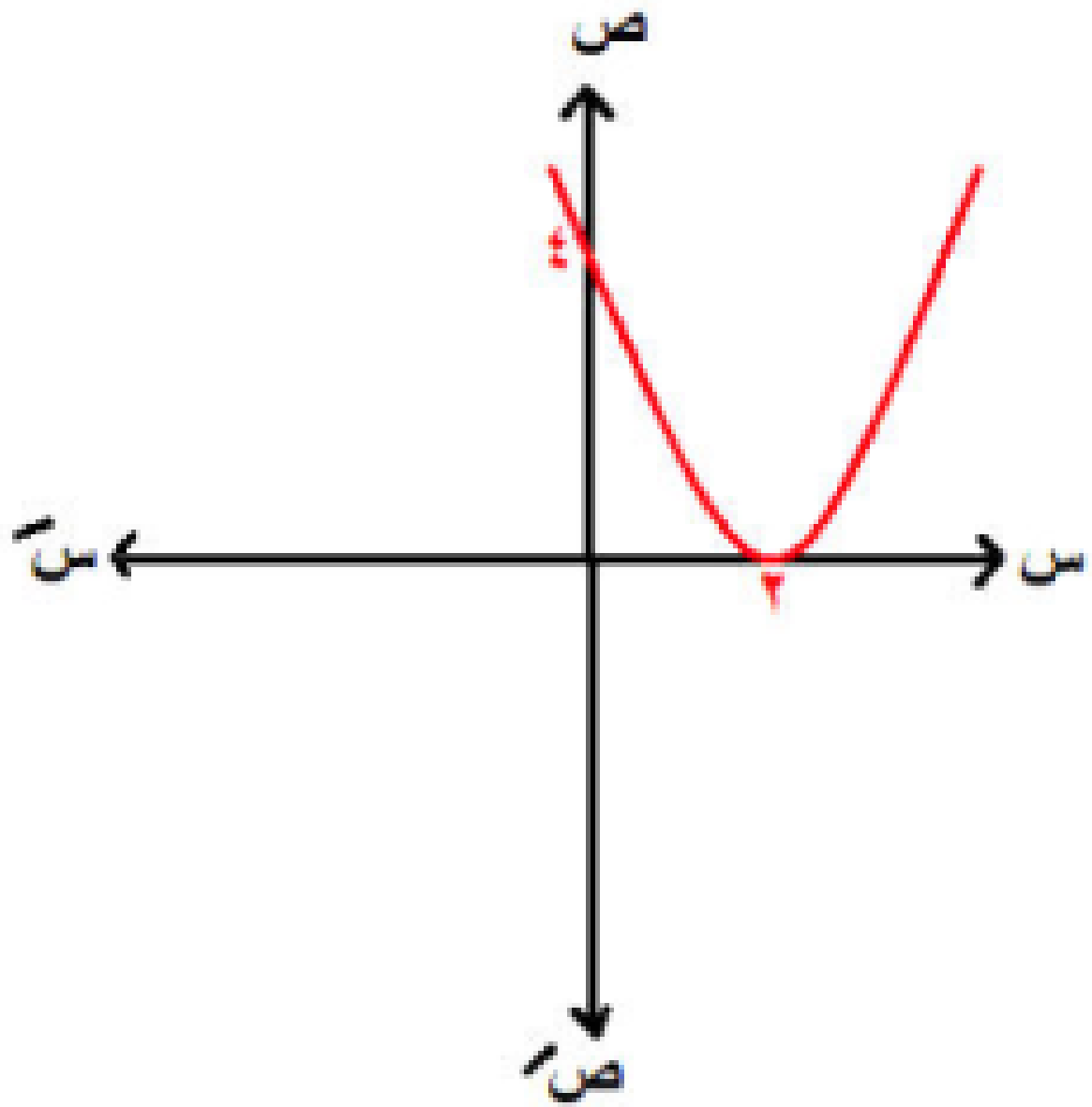
المجال = ح

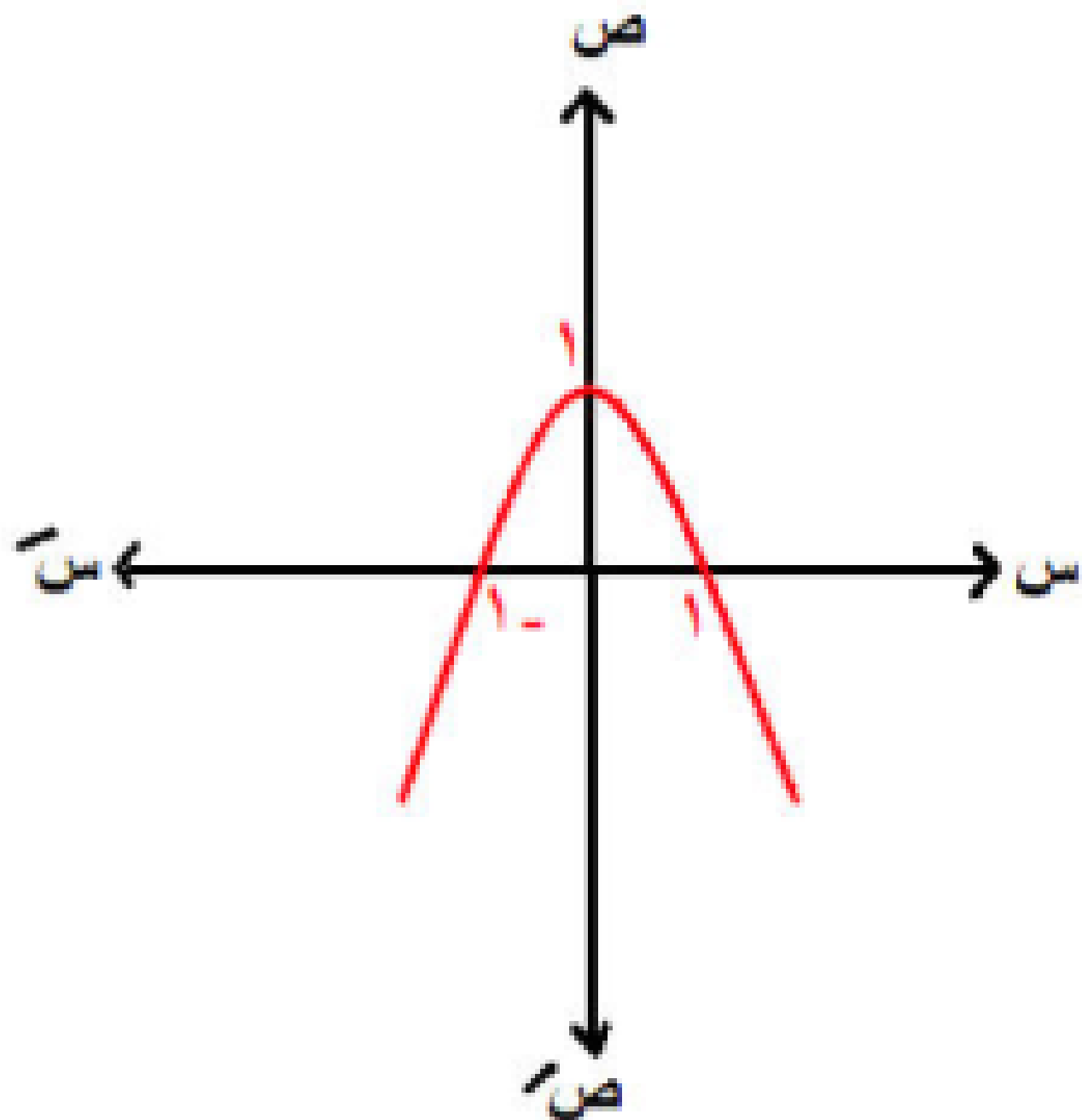
المدى :

[-∞ ، ∞]

النوع :

ليست زوجية
وليست فردية





٥ د (س) = -س^٢ + ١

د (س) = -س(س + ١) + ١

رأس المنحني
مفتوح لأسفل
(١، ٠)

المجال = ح
المدى :

الأطراف :

تزايدية [٠ ، ∞ -]

تناقصية [∞ ، ٠]

[١ ، ∞ -]

النوع :
زوجية

وليست أحادية

$$د (س) = ٢س^٢ + ب س + ج$$

الفكرة
الثالثة

رأس المنحني $(\frac{ب}{٢٢}, د)$ ، $(\frac{ب}{٢٢}, د)$

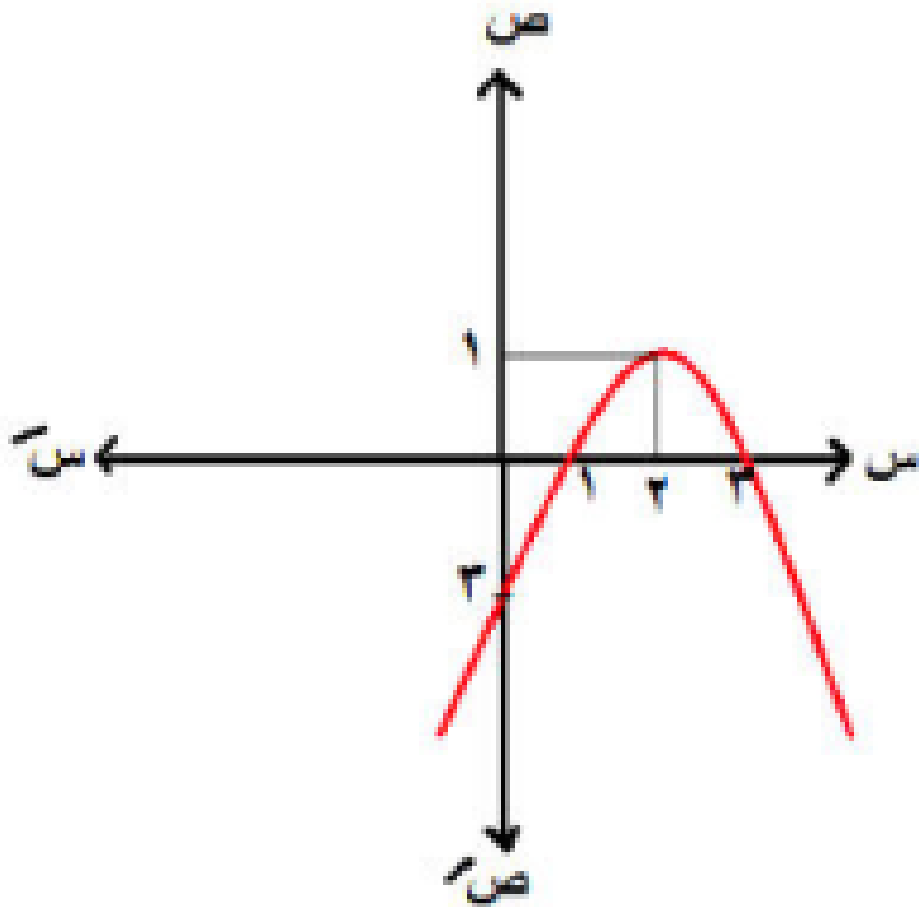
د (س) = س^٢ + س - ٣

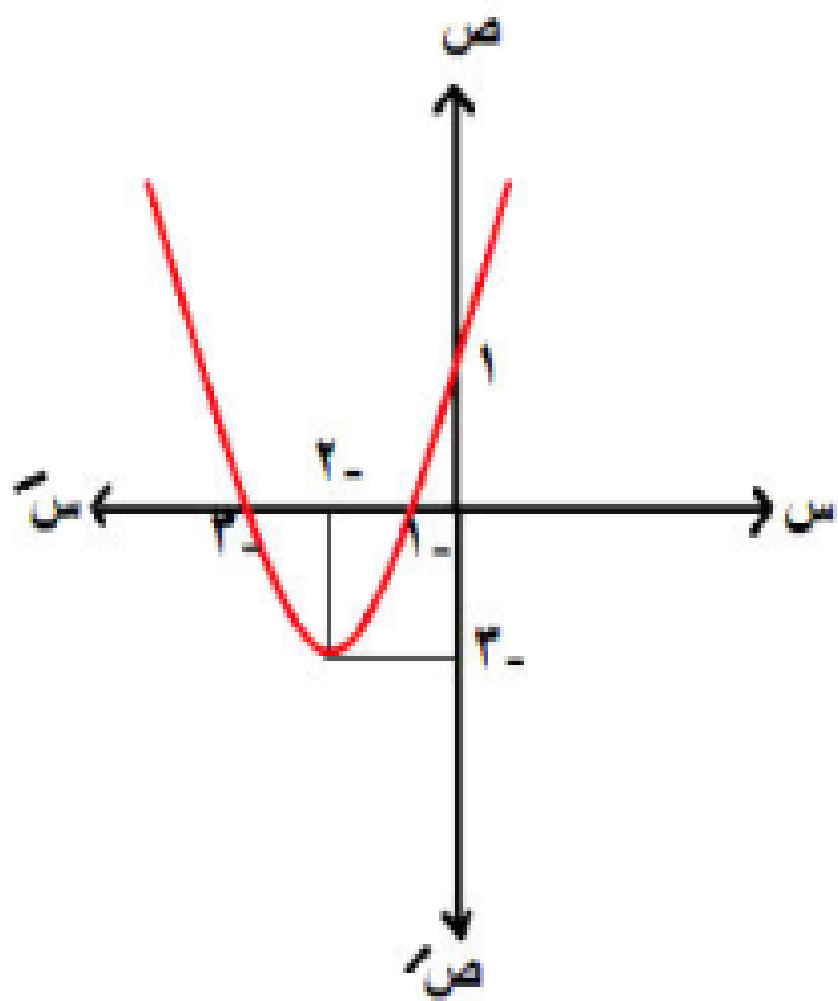
$$١ = ٣ - (٢) س + (٢) س^٢ = (٢) د$$

$$٢ = \frac{٤}{٢} = \frac{ب}{١٢}$$

$$١ = ٣ - (٢) س + (٢) س^٢ = (٢) د$$

رأس المنحني (٢ ، ١) مفتوح لأسفل





$$٧ \quad د (س) = س^٢ + ٤س + ١$$

$$١ = ٢ \quad ٤ = ب \quad ١ = ج$$

$$٢- = \frac{٤-}{٢} = \frac{ب-}{٢ج}$$

$$٣- = ١ + (٢-)٤ + (٢-)^٢ = (٢-) د$$

رأس المنحني (٢-، ٣-) مفتوح لأعلي

لأطراف :

$$] ٢-، \infty - [$$

$$] \infty، ٢- [$$

المجال : ح

المدى :

$$] \infty، ٣- [$$

النوع :

ليست زوجية

وليست فردية

وليست أحادية

علي فكرة النوع ده ممكن يتحل بطريقتة كمان

هنزود مربع نصف معامل س مرة ونطرحه مرة

$$4s \leftarrow 2^2 = 4$$

$$(s^2 + 4s + 4) - (s^2 + 4s + 1)$$

$$(s + 2)^2 - 3$$

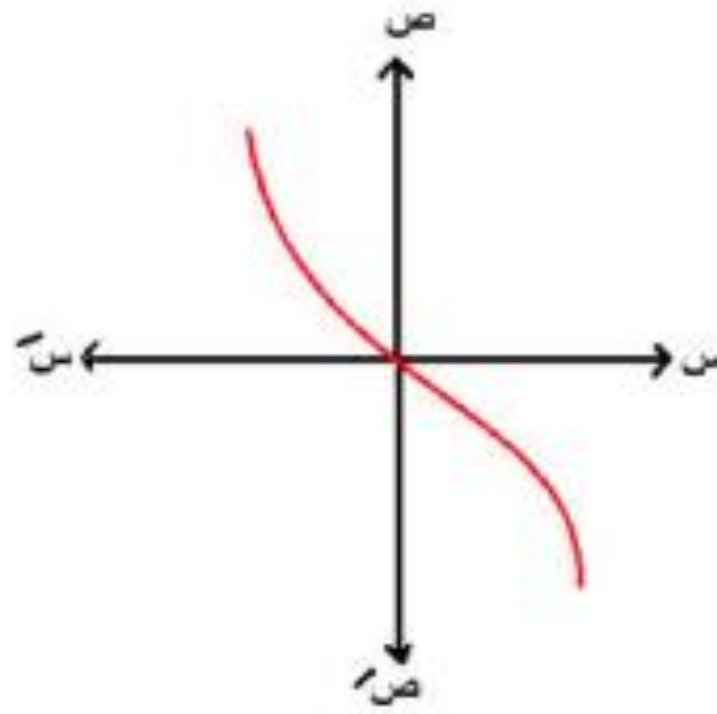
رأس المنحني (-2, -3) وهكذا

رابعاً: الدالة التكعيبية

المجال : ح
المدى : ح
النوع : فردية – أحادية

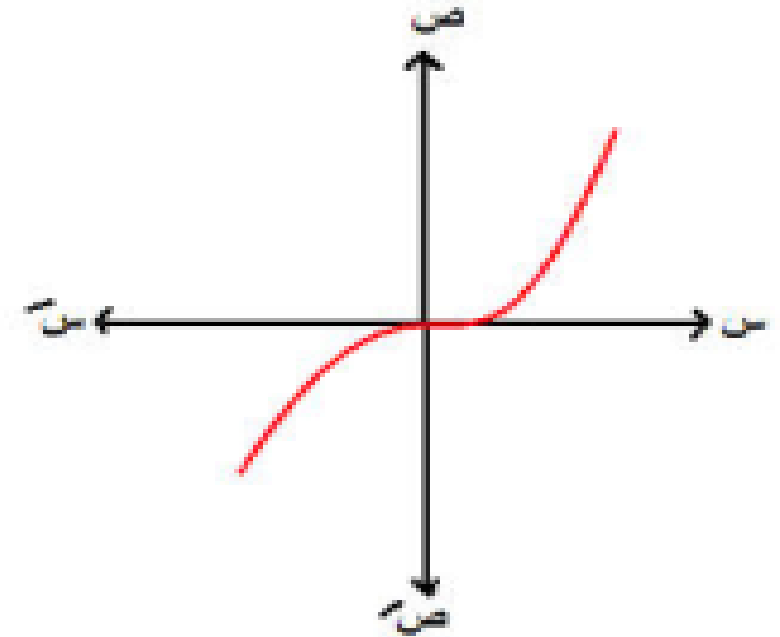
سالبة

$d (س) = -س^3$
الثاني والرابع



موجبة

$d (س) = س^3$
الأول والثالث



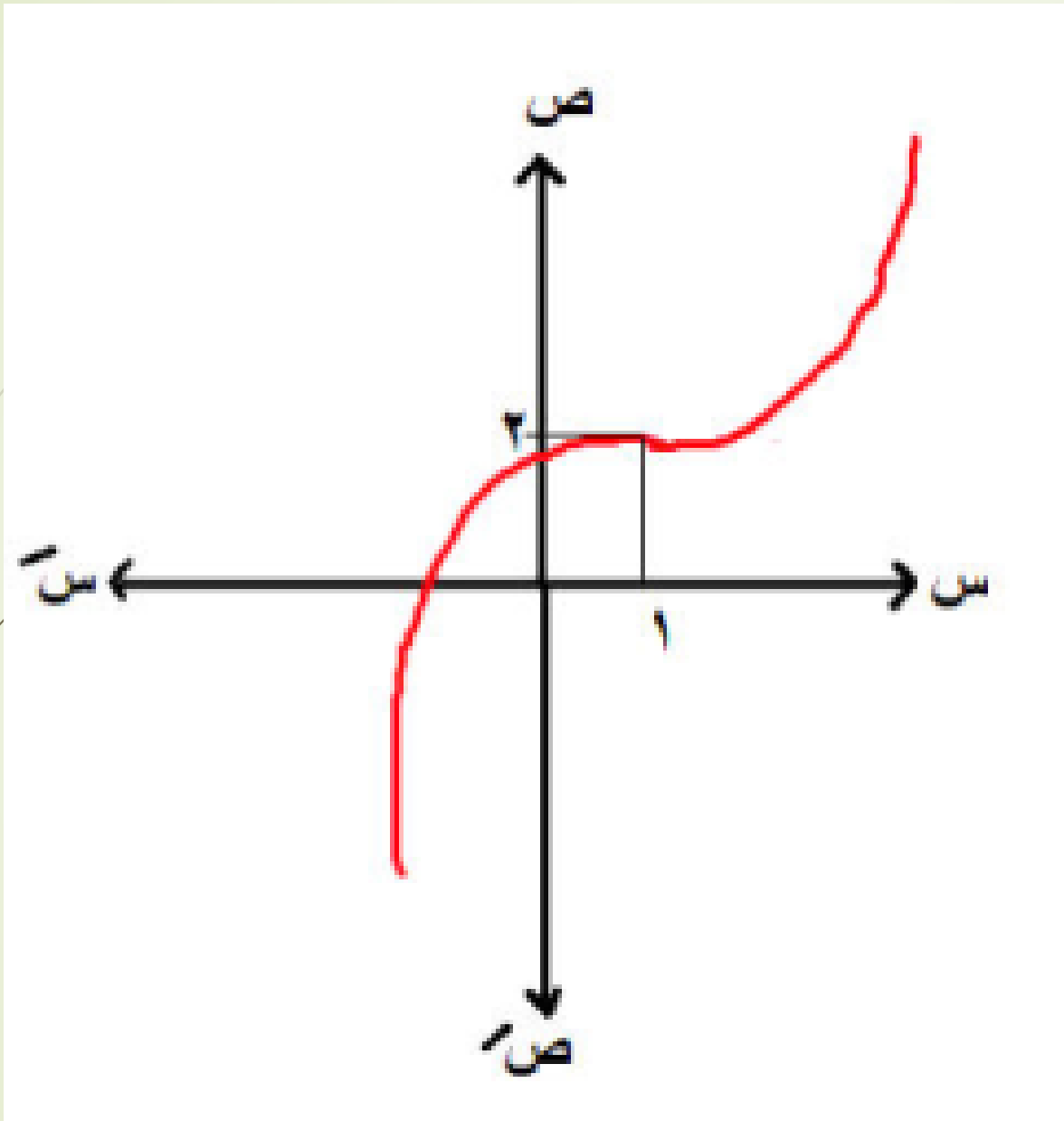
$$د (س) = (س + ٢) + ٢$$

رأس المنحني (- ٢ ، ج)

$$د (س) = (س - ١) + ٢$$

٨

الحل



رأس المنحني

(٢ ، ١)

دالة موجبة

المجال : ح

المدى : ح

النوع :

ليست زوجية

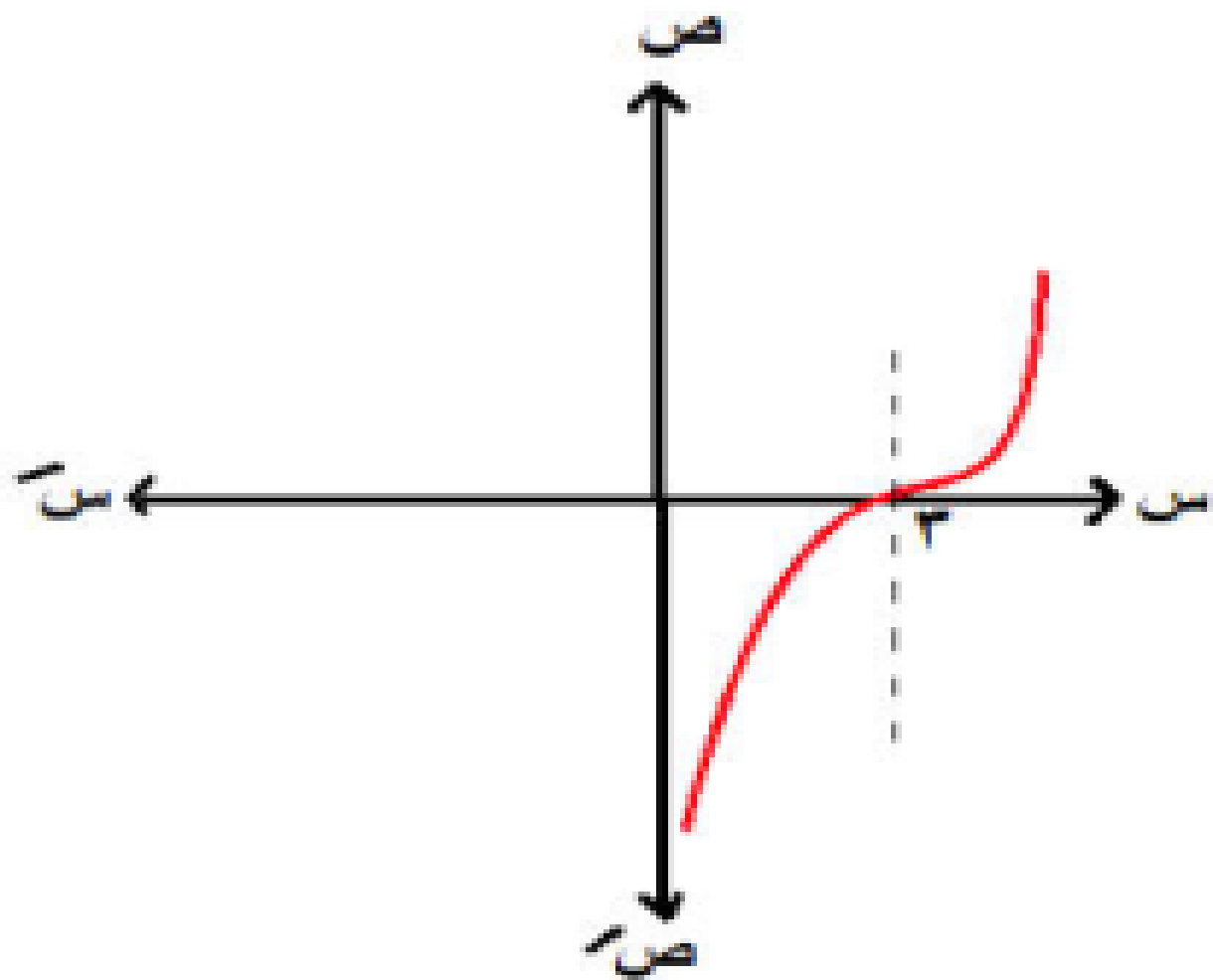
وليست فردية

أحادية

الأطراف : تزايدية علي ح

$$d \ (s) = (s + p)^2 + j$$

رأس المنحني $(-p, j)$



$$d \ (s) = (s - 3)^2$$

$$d \ (s) = (s - 3)^2 + 0$$

رأس المنحني
 $(3, 0)$

$$د (س) = ٣ - س^٣$$

$$د (س) = ٣ - س^٣$$

$$د (س) = ٣ - (س + ٠)^٣$$

رأس المنحني المجال : ح

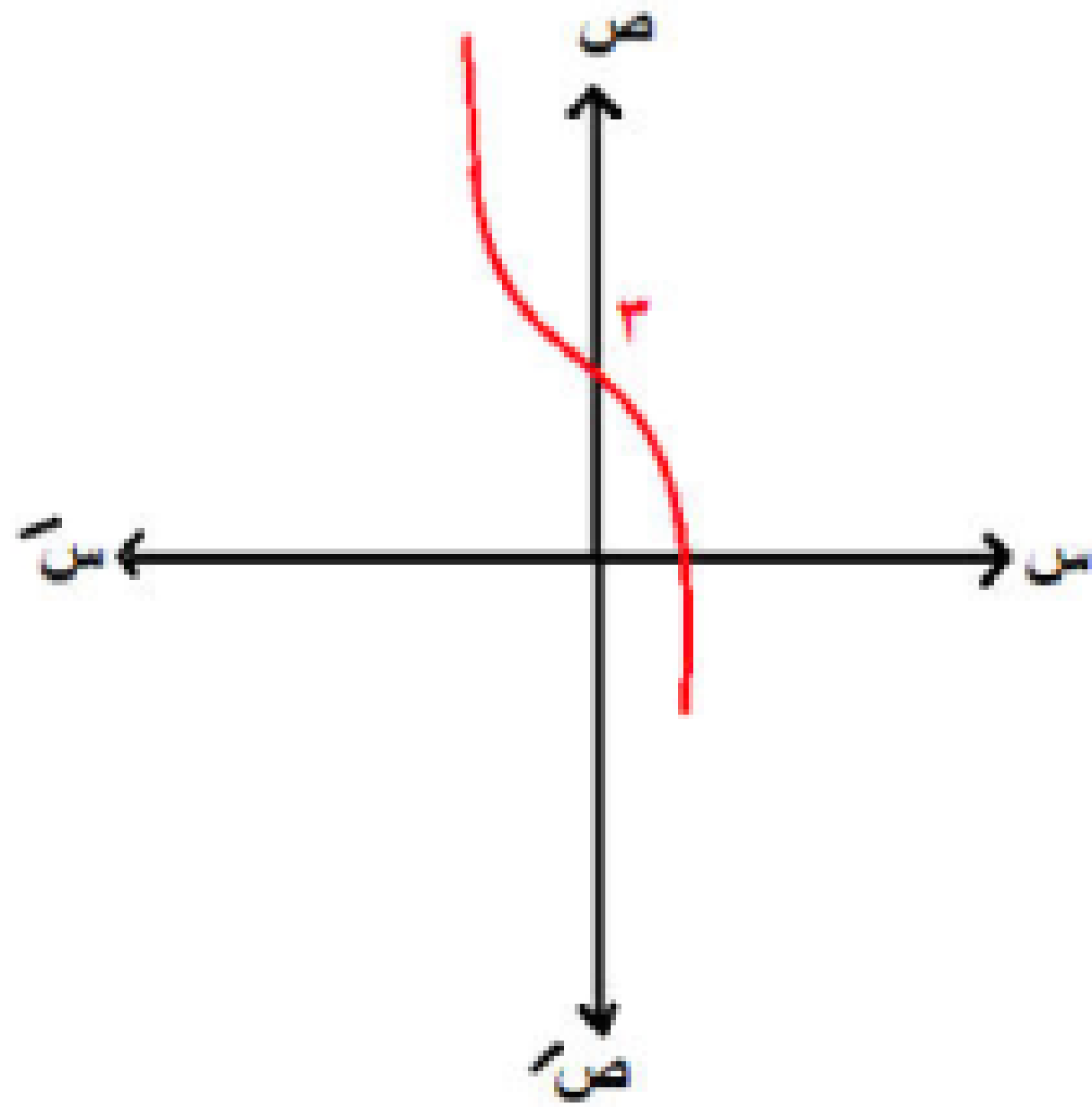
(٠، ٣) المدي : ح

النوع :

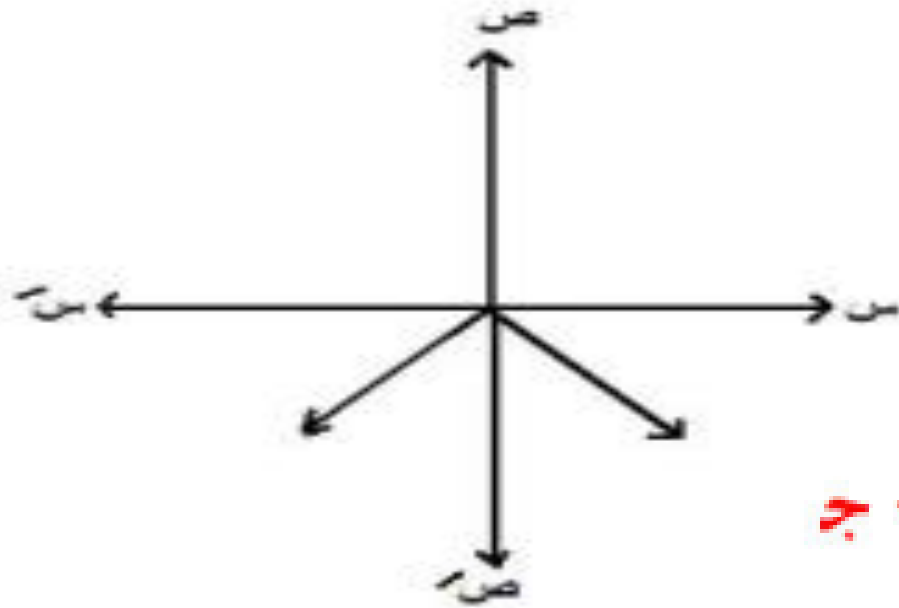
ليست زوجية

وليست فردية

أحادية



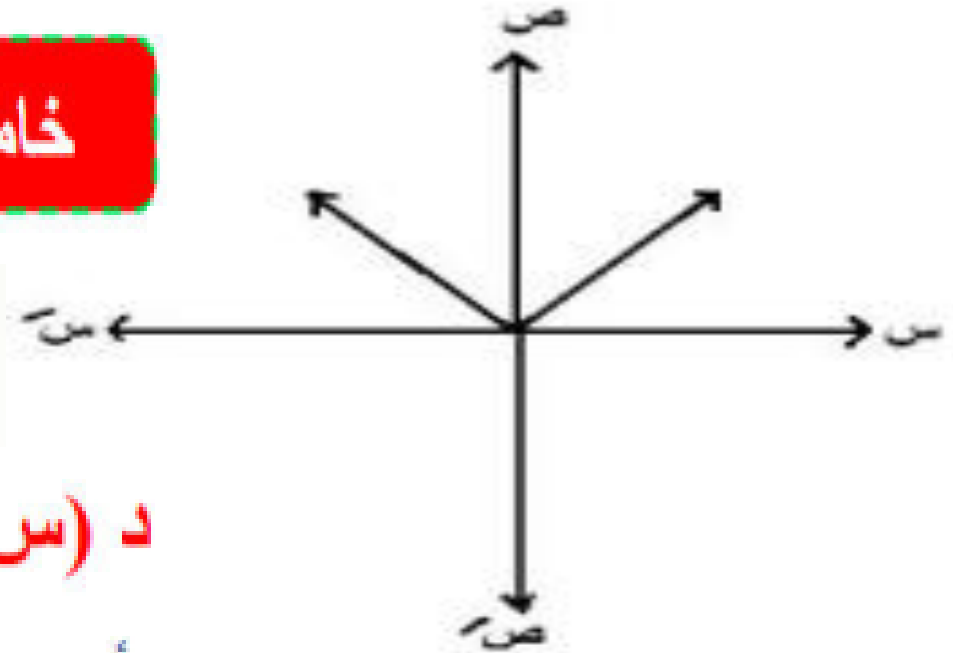
$$d(s) = -|s|$$



المجال : ح
المدى :
[0 , -\infty]
النوع :
زوجية

خامساً : دالة المقياس

$$d(s) = |s|$$

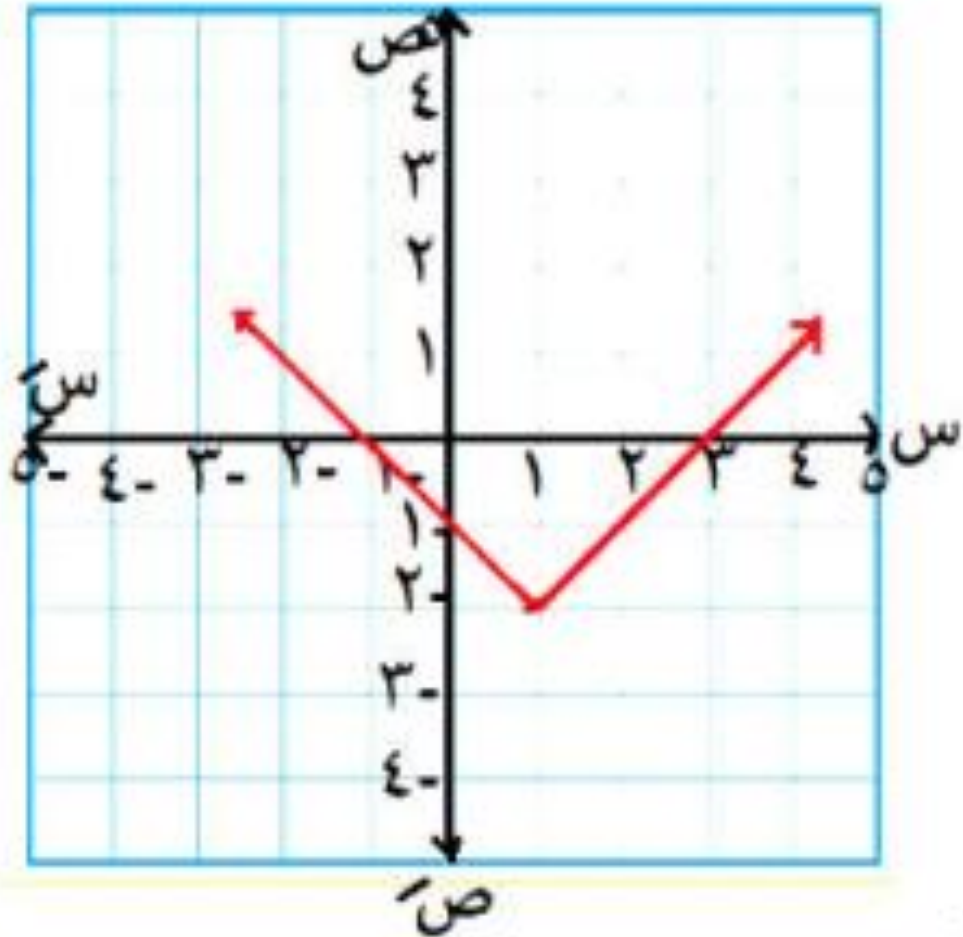


د (س) = |س + ٢| + ج
رأس المنحني (-٢ ، ج)

المجال : ح
المدى :
[0 , \infty]
النوع :
زوجية

$$d(s) = |s + 2| + j$$

رأس المنحني (- 2 ، j)



$$d(s) = |s - 1| - 2$$

الحل

لأعلى

النوع :

ليست زوجية

وليست فردية

وليست أحادية

رأس المنحني

(1 ، - 2)

المجال = ح

المدى :

$]-\infty, 2[$

الأطراف :

$]-\infty, 1[$ تناقصية

$]-\infty, 1[$ تزايدية

$$d(s) = |s + 2| + j$$

رأس المنحني (- ٢ ، ج)

$$d(s) = |s - 2| - 2$$

$$d(s) = |s| - 2 + 2$$

رأس المنحني

(٢ ، ٠)

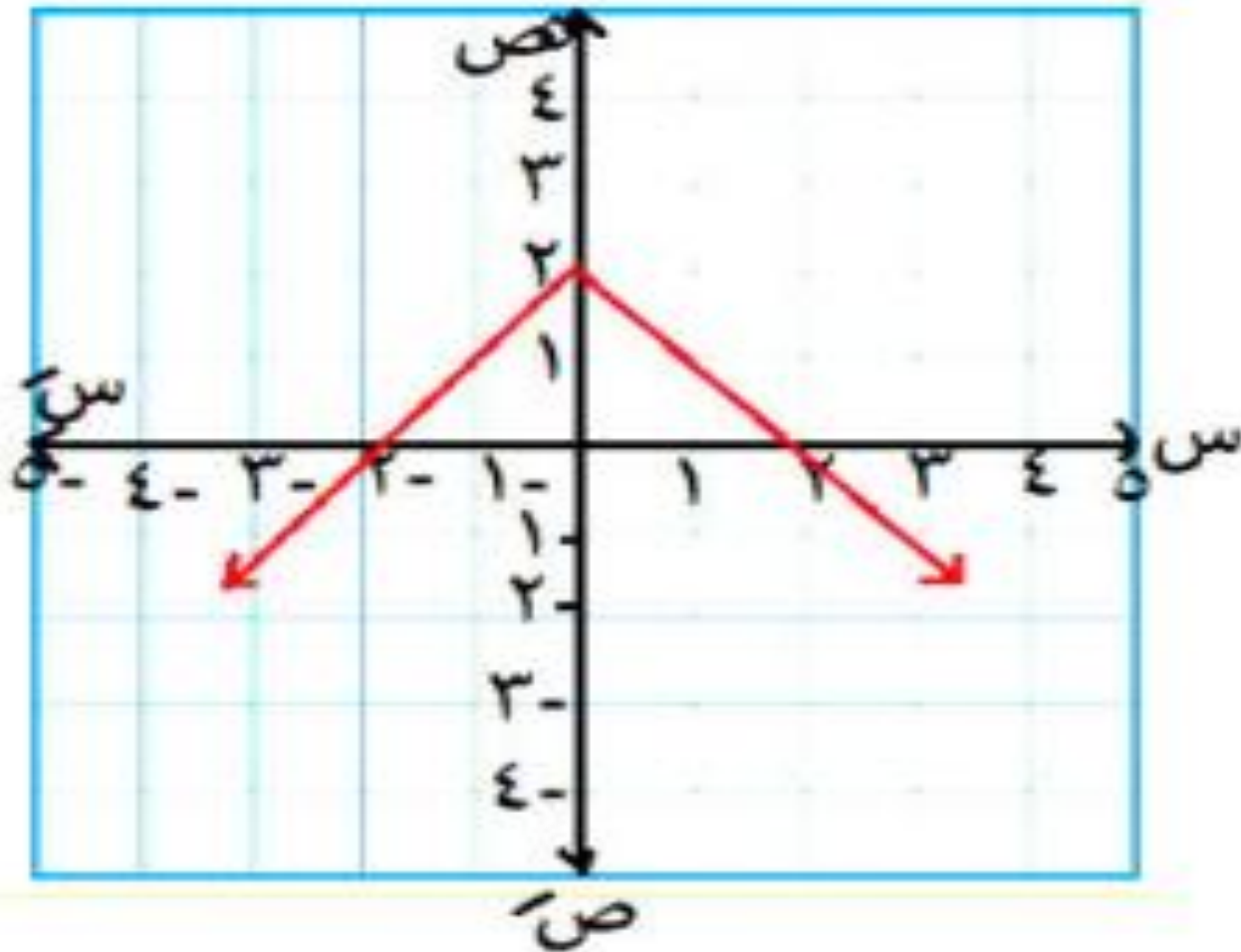
لأسفل

المجال :

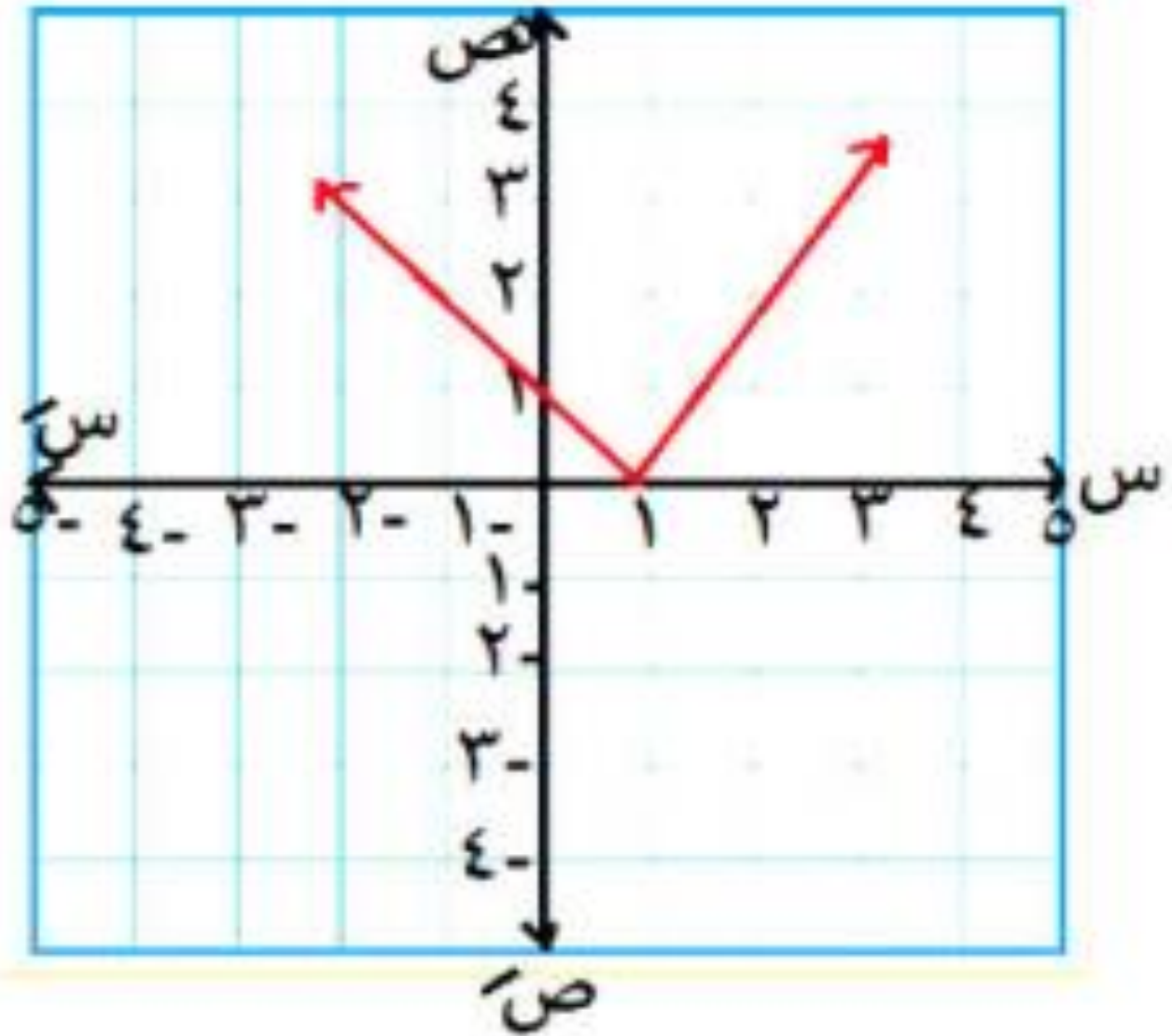
المدى :

النوع :

الأطراف :



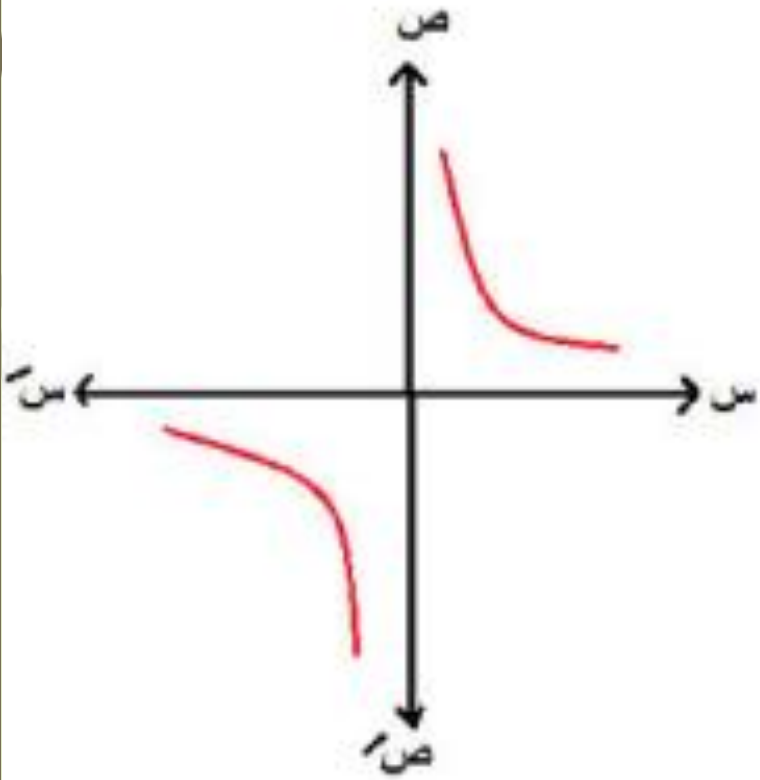
٢ د (س) = |س - ١| | (١ ، ٠) لأعلي



- : المجال
- : المدى
- : التوزيع
- : الأطراد

سادساً: الدالة الكسرية

الفكرة الأولى



المجال :

ح - {0}

المدى :

ح - {0}

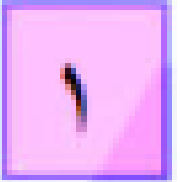
النوع :

فردية - أحادية

الأطراف :

تناقصية | - ∞ ، 0 | و تناقصية | 0 ، ∞ |

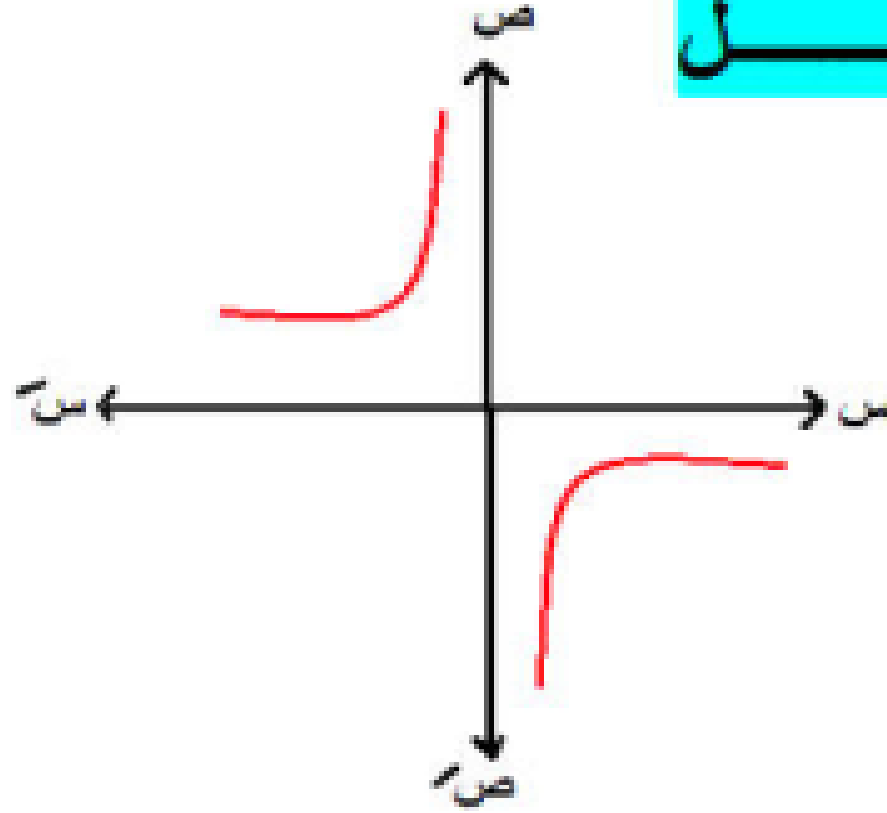
$$د (س) = \frac{1}{س}$$



د (س) =

$$\frac{1}{s}$$

الحل



المجال :

ح - {0}

المدى :

ح - {0}

النوع :

فردية - أحادية

الأطراف :

تزايدية | - ∞ ، 0 | وتزايدية | 0 ، ∞ |

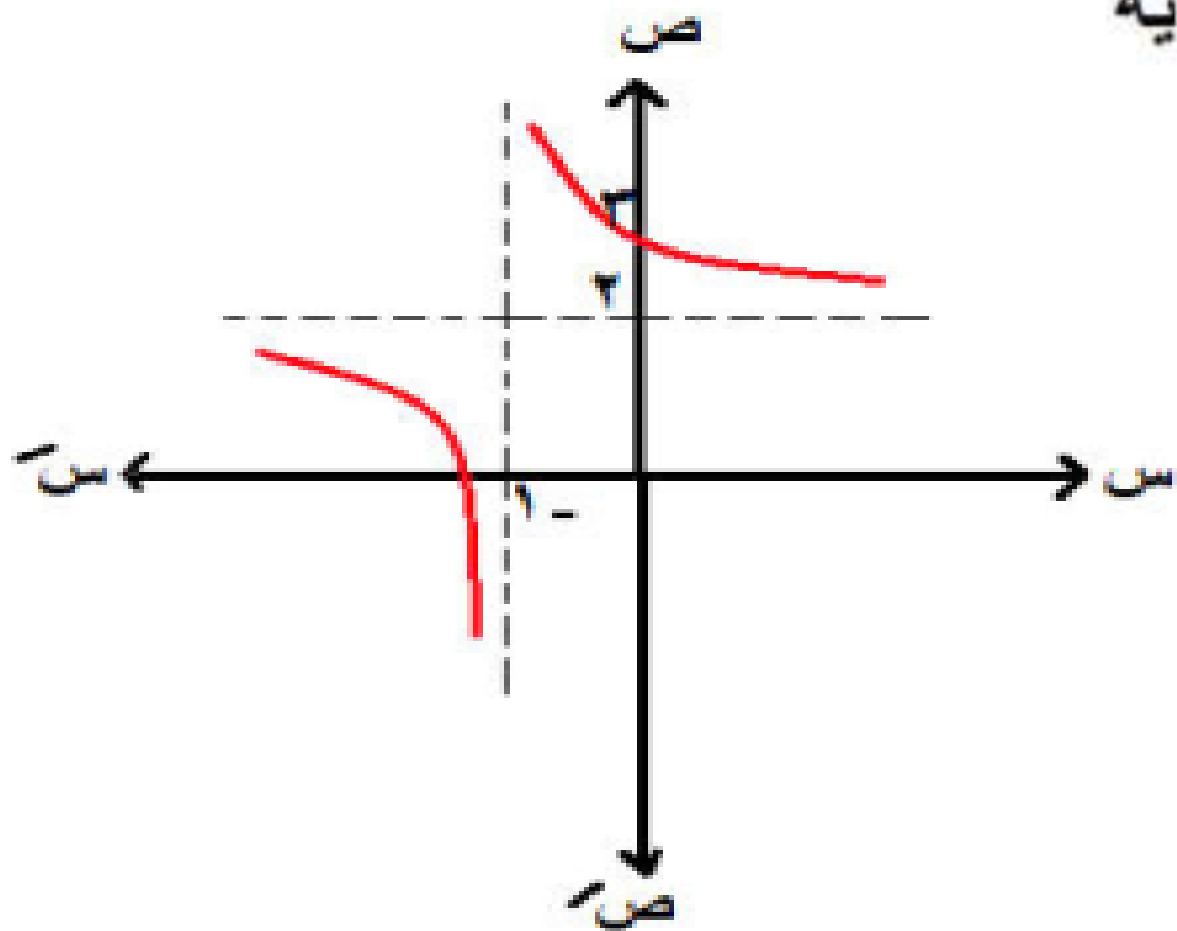
ربع ثانى ورابع

$$2 + \frac{1}{1+s} = (s) \quad \text{د (س)}$$

المجال : ح - {1-}
 المدى : ح - {2}

رأس المنحني (-1، 2) موجب
 النوع : ليست زوجية وليست فردية - أحادية
 الأتراد :

تناقصية | -∞، 1-]
 تناقصية | 1-، ∞]



$$\frac{1}{2+s} = (s)$$

رأس المنحني $(-2, 0)$ سالب

المجال :

ح - $\{-2\}$

المدى :

ح - $\{0\}$

النوع :

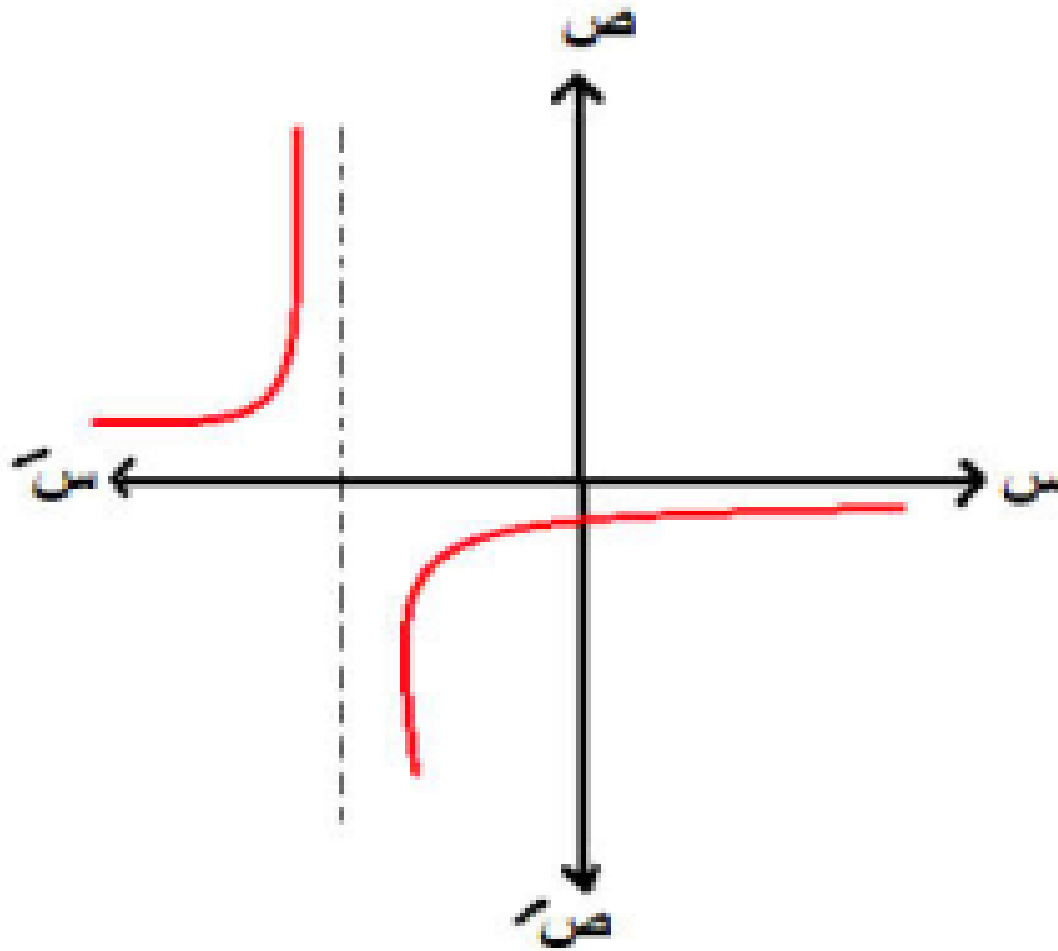
ليست زوجية

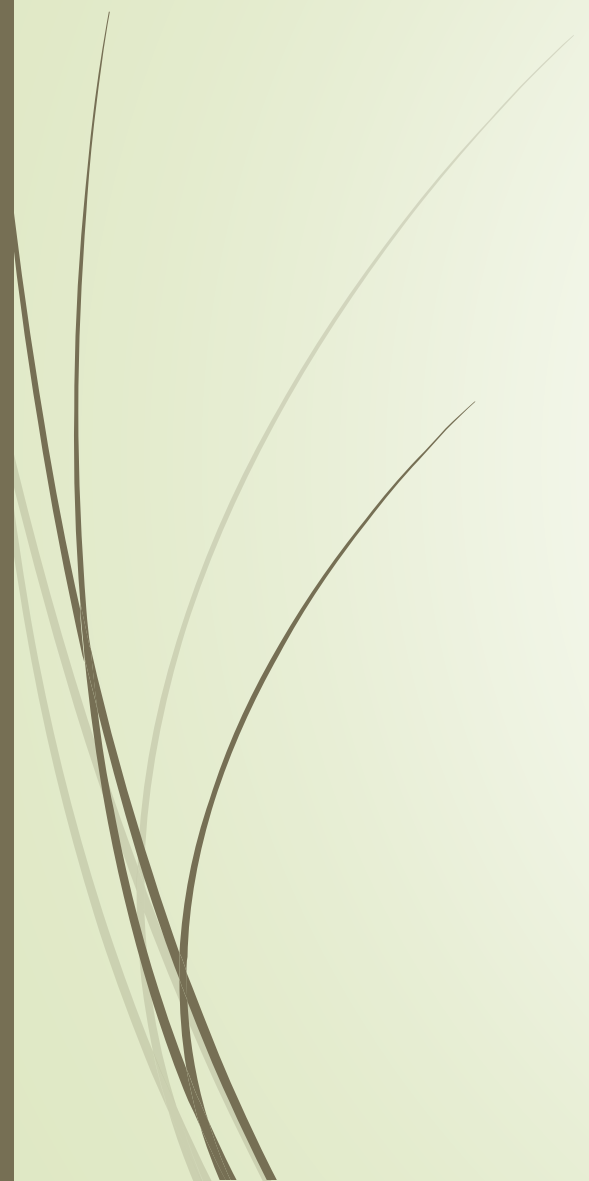
وليست فردية

أحادية

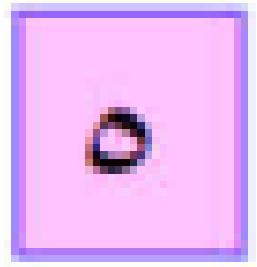
الأطراف :

تزايدية $[-2, \infty)$ وتزايدية $(-\infty, -2]$





$$1 - \frac{1}{s} = (s) \quad \text{د}$$



رأس المنحني (٠ ، ١ -) موجب

المجال :

ح - { ٠ }

المدى :

ح - { ١ }

النوع :

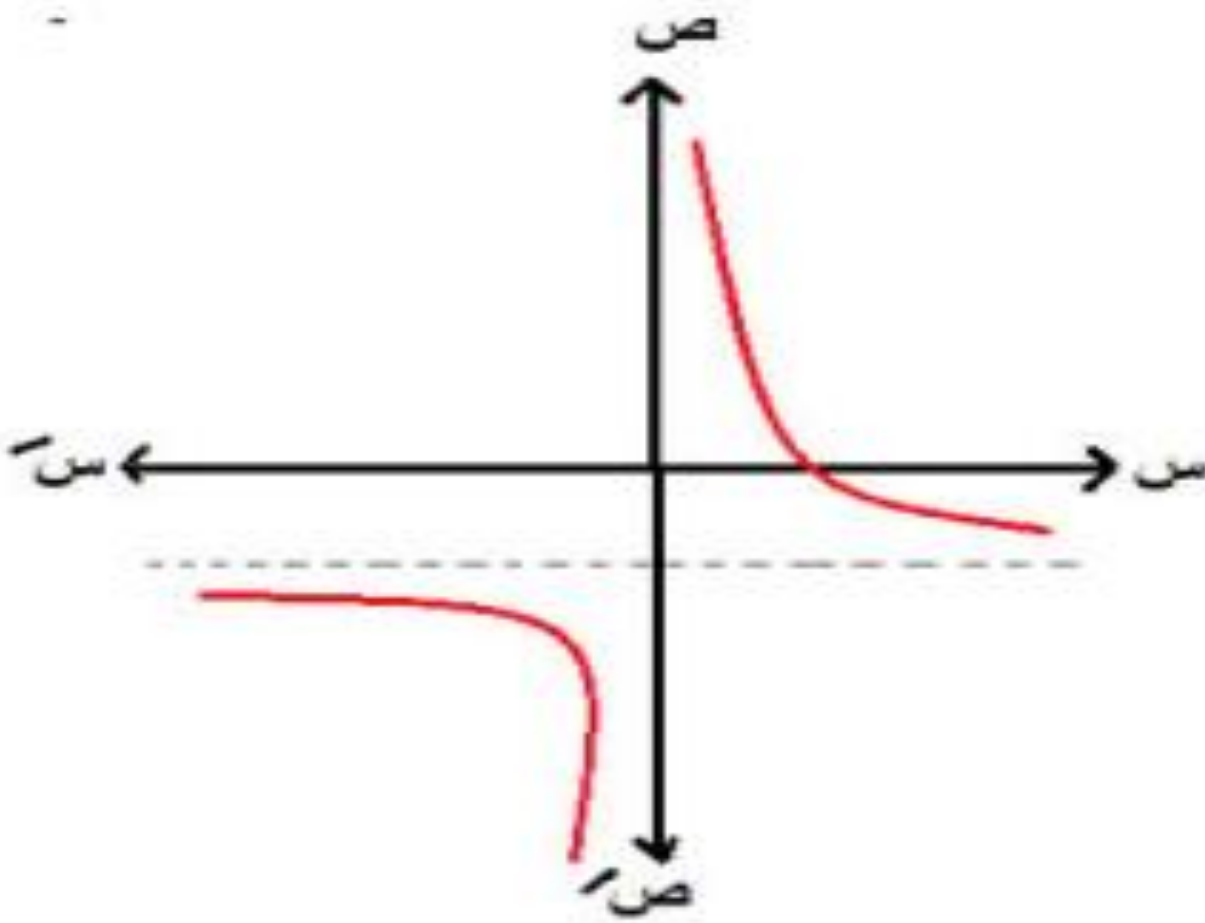
ليست زوجية

وليست فردية

أحادية

الأطراف :

تناقصية] - ، ∞ [و تناقصية] ∞ ، ٠ [



الفكرة الثانية محتاجة تعديل

س مضروبة $3 \times 3 = 3$
 $\therefore 2 - 3 \times 3 = 6 - 3$

$$\frac{5 - 6 + (6 - 3s)}{(2 - s)} = د(س)$$

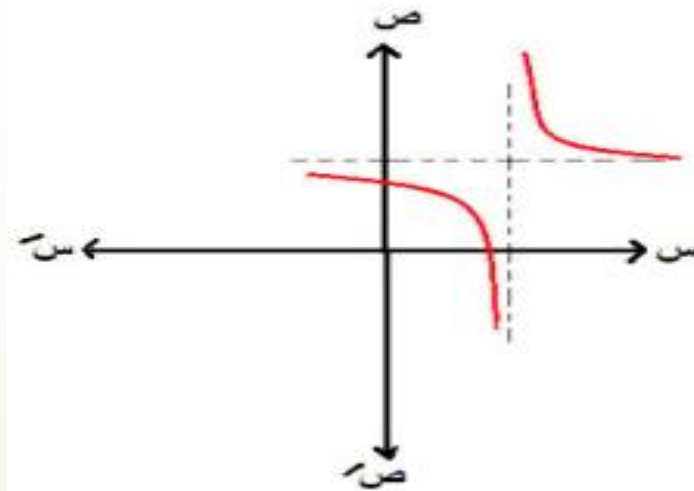
$$\frac{1}{2 - s} + \frac{(6 - 3s)}{(2 - s)} = د(س)$$

$$\frac{1}{2 - s} + \frac{(2 - s)3}{(2 - s)} =$$

$$3 + \frac{1}{2 - s} =$$

$$\frac{3s - 5}{2 - s} = د(س)$$

رأس المنحني (2, 3) موجب



المجال :

ح - {2}

المدى :

ح - {3}

النوع :

ليست زوجية

وليست فردية

أحادية

الأطراف :

تناقصية | -∞, 2 | وتناقصية | 2, ∞ |

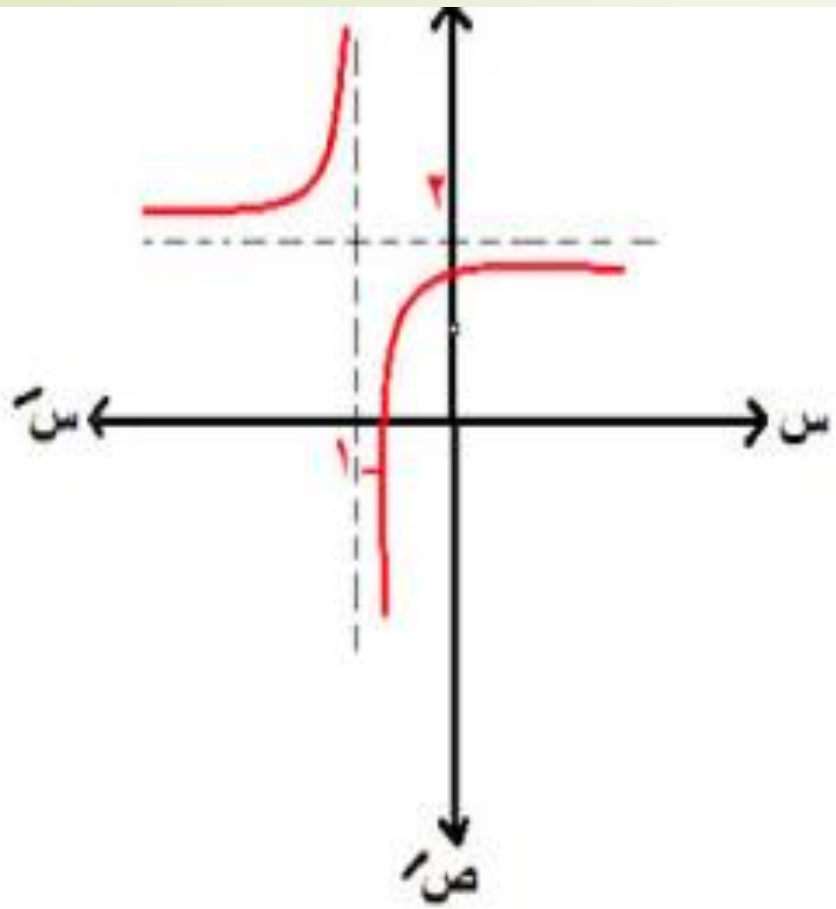
$$د (س) = \frac{س^2}{س+1}$$

$$د(س) = \frac{س^2}{س+1} - \frac{س^2+2}{س+1} = \frac{س^2-2-2-س^2}{س+1} = \frac{-4}{س+1}$$

$$= \frac{2}{س+1} - \frac{(س+1)^2}{س+1} =$$

$$= 2 + \frac{2-}{س+1}$$

رأس المنحني (-1, 2) سالب



ح - {1-}

المدى :

ح - {2}

النوع :

ليست

زوجية

وليست

فردية

أحادية

الأطراف :

تزايدية] -∞ ، -1 [وتزايدية] -2 ، ∞]

$$\frac{s+1}{s}$$

$$= d(s)$$

$$\frac{1}{s} + \frac{s}{s} = d(s)$$

$$\frac{1}{s} + 1 =$$

$$1 + \frac{1}{s} =$$

رأس المنحني (١، ٠) موجب

المجال :

ح - {٠}

المدى :

ح - {١}

النوع :

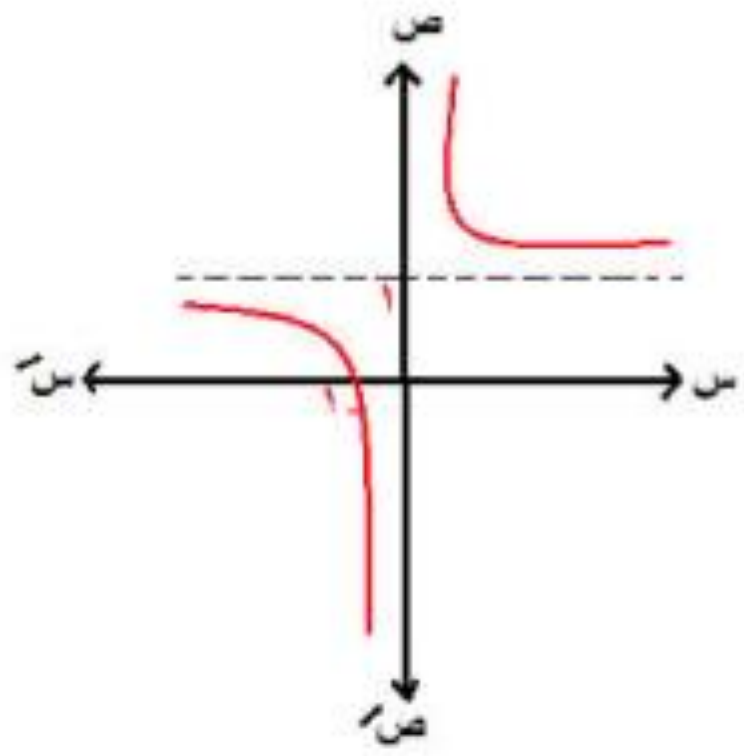
ليست زوجية

وليست فردية

أحادية

الأطراف :

تناقصية | -∞ ، ٠ | و تناقصية | ٠ ، ∞ |



$$1 + (0 + s)^3$$

٢ د(س) = س^٣ + ١ هو نفس منحنى

هو نفس منحنى ر(س) = س^٣

بإزاحة (١، ٠) ...

وحده من اتجاهه وكمه

رأس المنحنى (١، ٠)

بإزاحة رأسية مقدارها وحدة في اتجاه وص ←

الفكرة الأولى الإزاحات

١ منحنى الدالة د(س) = (س + ١) - ٥

هو نفس منحنى ر(س) = س^٣ (١، -٥)

بإزاحة أفقية وحده من اتجاهه وكمه

وإزاحة رأسية ٥ وحدات من اتجاهه وكمه ←

رأس المنحنى (١، -٥)

إزاحة أفقية وحدة في اتجاه وس/ ←

إزاحة رأسية ٥ وحدات في اتجاه وص ←

د(س) = |س - ١| هو نفس |س|

بإزاحة

(١، ٠)

الحل

رأس المنحني (١، ٠)

بإزاحة أفقية مقدارها وحدة في اتجاه يسار

الفكرة الثانية
تحويل الجذر لمقياس

$$16 + 8s - s^2 = (s) \quad 1$$

الحل

$$\sqrt{(4-s)} =$$

$$4 - s = 0 \quad + 1$$

رأس المنحني (4, 0) لأعلي

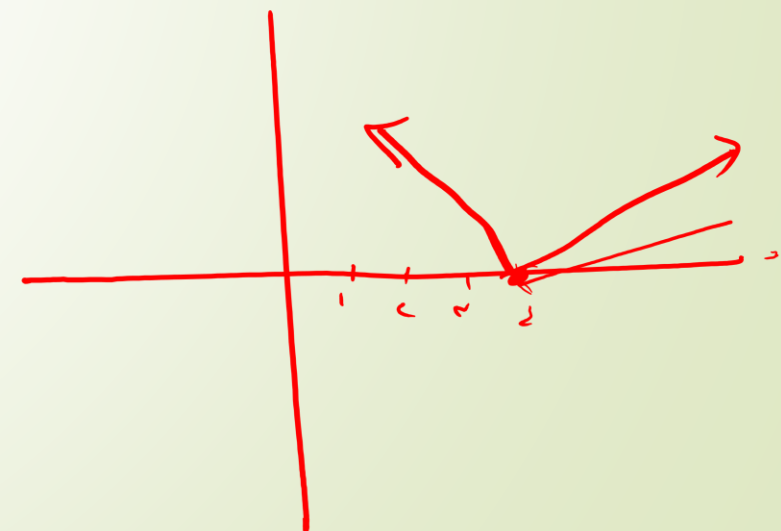
المجال : ح

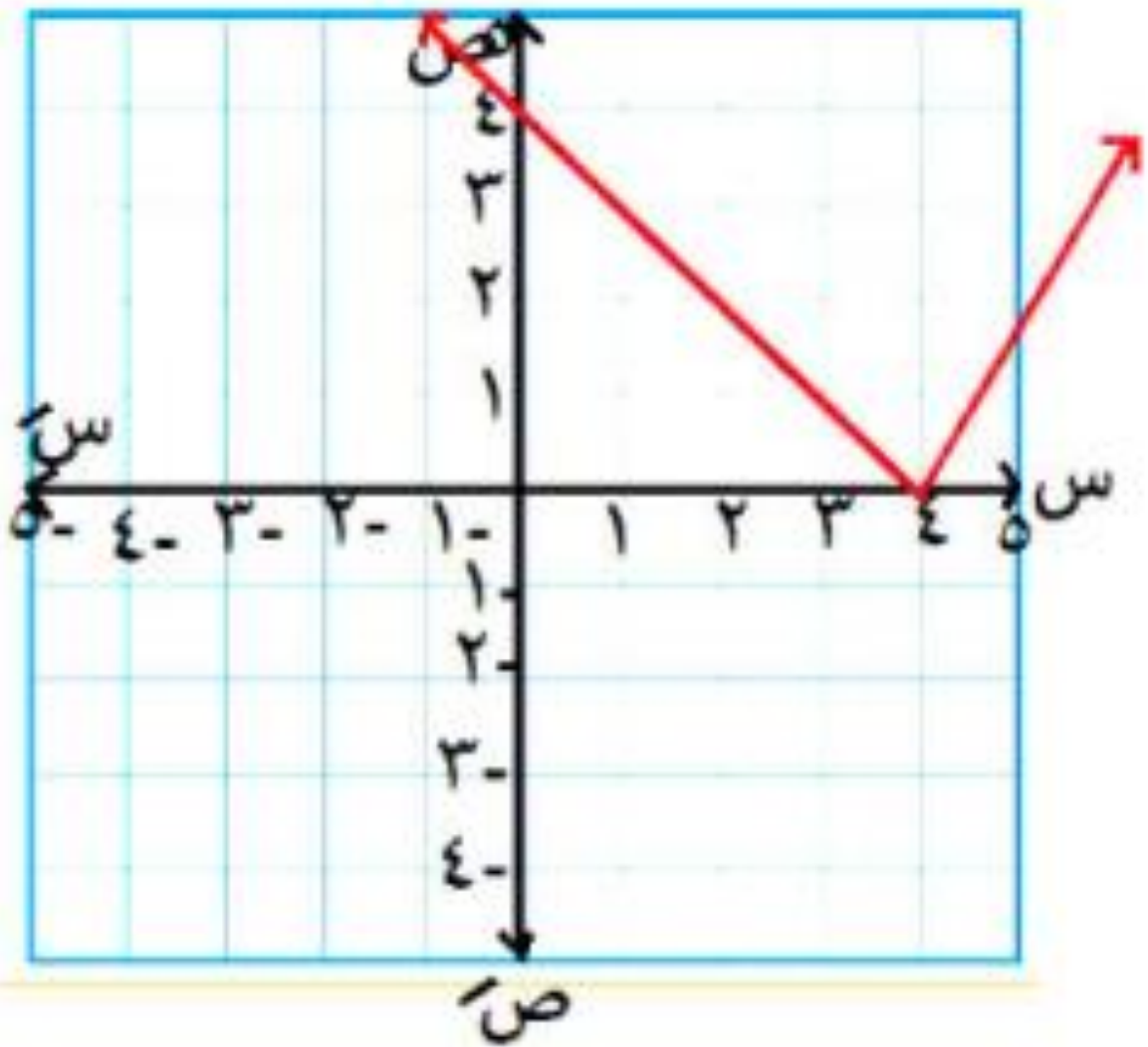
فاكر تحليل الثلاثي مربع كامل

(جذر الأول جذر الثاني)

إشارة الأوسط

وبعدين الجذر بيروح مع التربيع ويفضل المق





المدي :

$[-\infty, \infty]$

النوع :

ليست زوجية

ليست فردية

ليست أحادية

الأطراف :

تناقصية $[-\infty, 4]$

تزايدية $[4, \infty]$

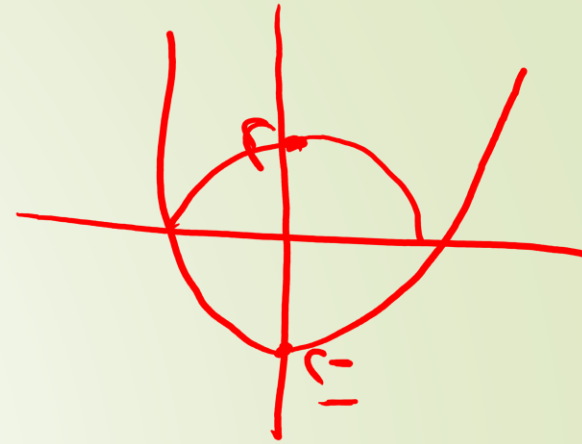
$$\sqrt{4 + 4s + s^2} = d(s) \quad 2$$

$$\sqrt{(s+2)^2} =$$

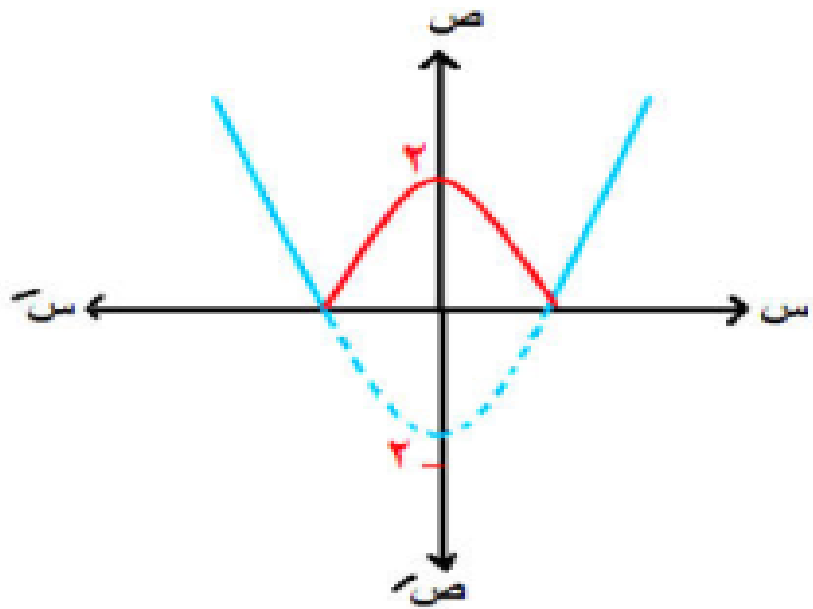
$$d(s) = |s+2|$$

رأس المنحني (-2, 0) لأعلي

الفكرة الثالثة دالة تربيعية داخل مقياس



يترسم دالة تربيعية وتنعكسها لأعلى إذا كانت إشارة
المقياس موجب أو لأسفل إذا كانت الإشارة سالبة



$$1 \quad | \text{د(س)} = \text{س}^2 - 2 |$$

الدالة $\text{س}^2 - 2$
رأس المنحني

$$(0, -2)$$

$$\begin{cases} \text{ر(س)} & \text{س} \leq 0 \\ \text{ر(س)} - & \text{س} > 0 \end{cases} = \text{د(س)}$$

دالة المقياس

$$\text{س}^2 - 2$$

$$2 - \sqrt{2}$$

$$D(s) = s^2 - 1$$

حل أنت

تفصلا رثر المتحن (اسا + ١) - ١ - (١ - ٢٠)

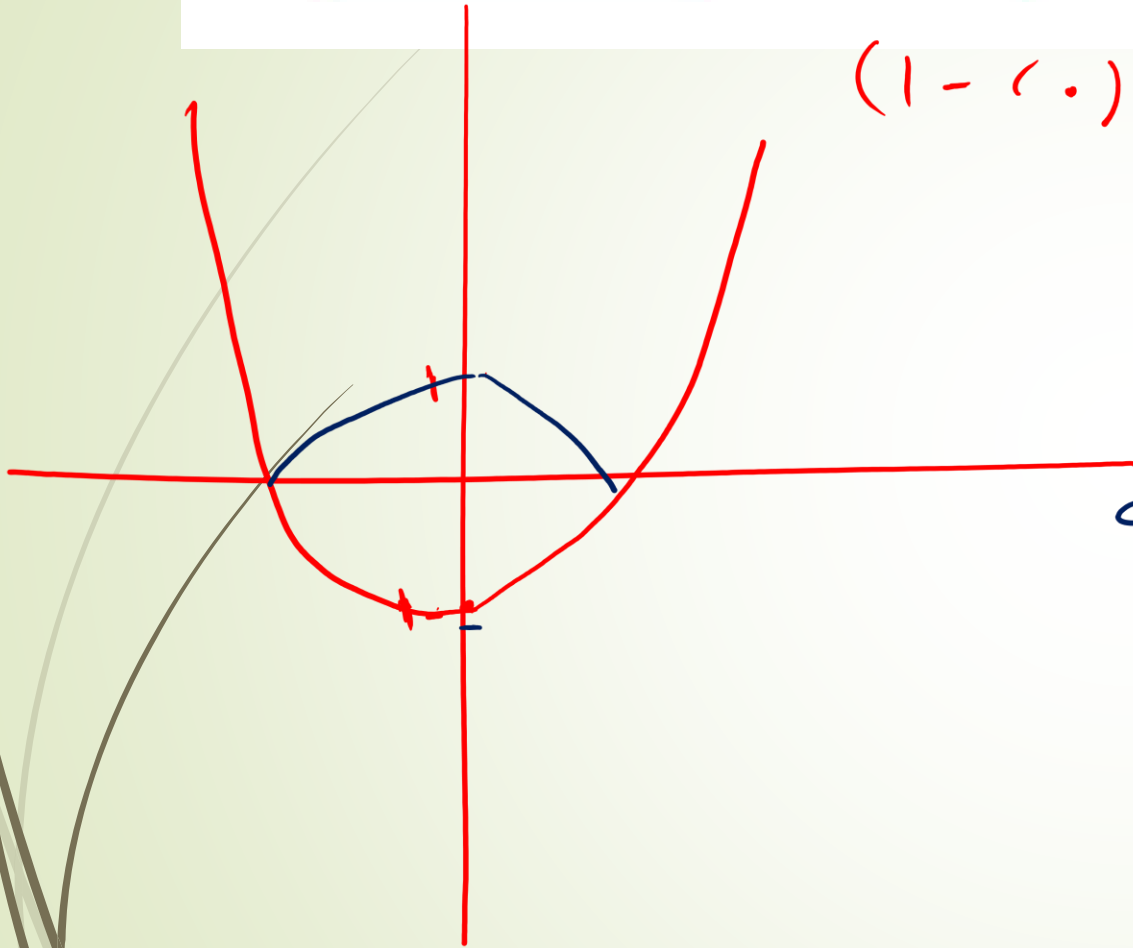
حاله = ح

المدى = $[-1, \infty)$

داله زوجيه لبت اطاره

الامر : $[-\infty, 1)$ متافيه

$[0, \infty)$ تزديه



$$3 \quad |د(س)| = |س^2 - 2س - 3|$$

حيث $س \in [-1, 4]$

$$ر(س) = 2س^2 - 2س - 3$$

$$1 = 2 \quad 2 = 1 \quad 3 = 2$$

$$1 = \frac{2}{2} = \frac{2}{2}$$

$$3 = 4 - 1 = 3 - 1 - 1 = (1)$$

رأس المنحني $(-1, 3)$

المجال : $[-1, 4]$

المدى :

$[0, 5]$

النوع :

ليست زوجية

ليست فردية

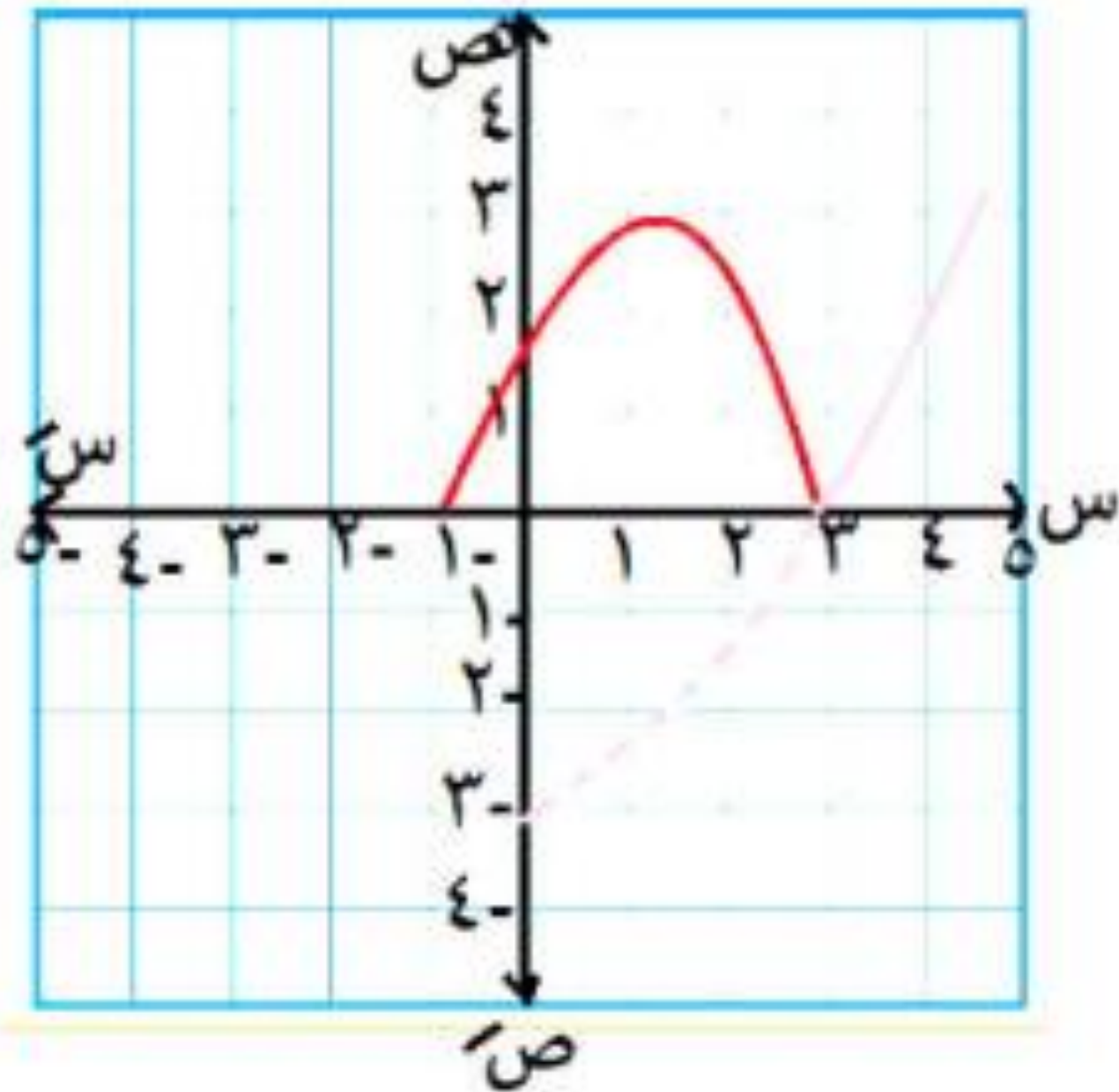
ليست أحادية

الأطراف :

تناقصية $[1, 3]$

تزايدية $[3, 4]$

تزايدية $[-1, 1]$

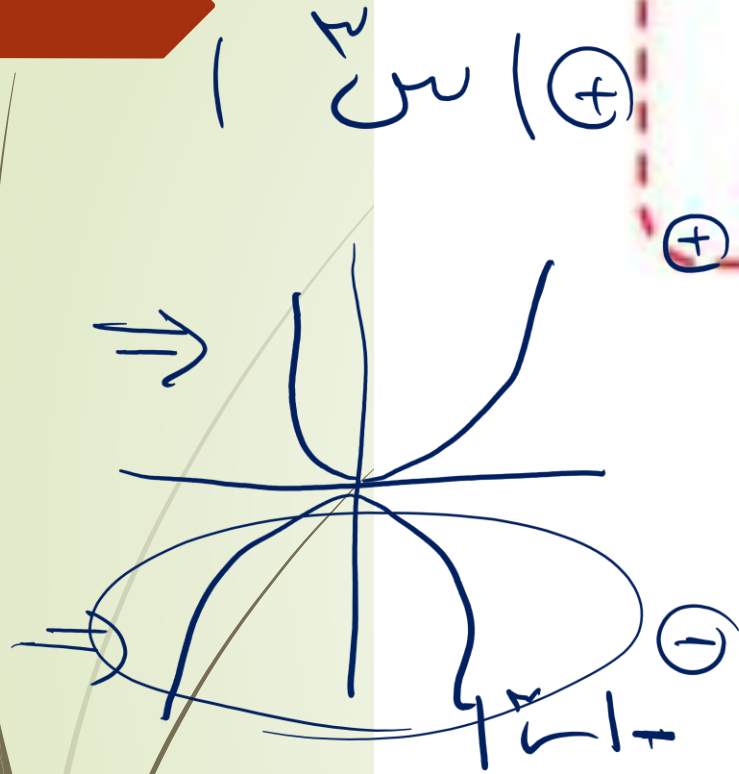


الفكرة الرابعة دالة تكعيبية داخل مقياس

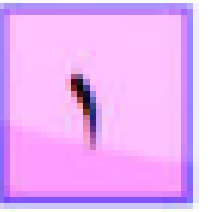
بترسم دالتين لو كان المقياس

+ بتأخذ الجزئين اللي فوق

ولو سالب يبقي الجزئين اللي تحت



$$|s| = |s^1|$$



• $s \leq 0$

s^2

= (s)

• $s > 0$

$-s^2$

المجال : ح

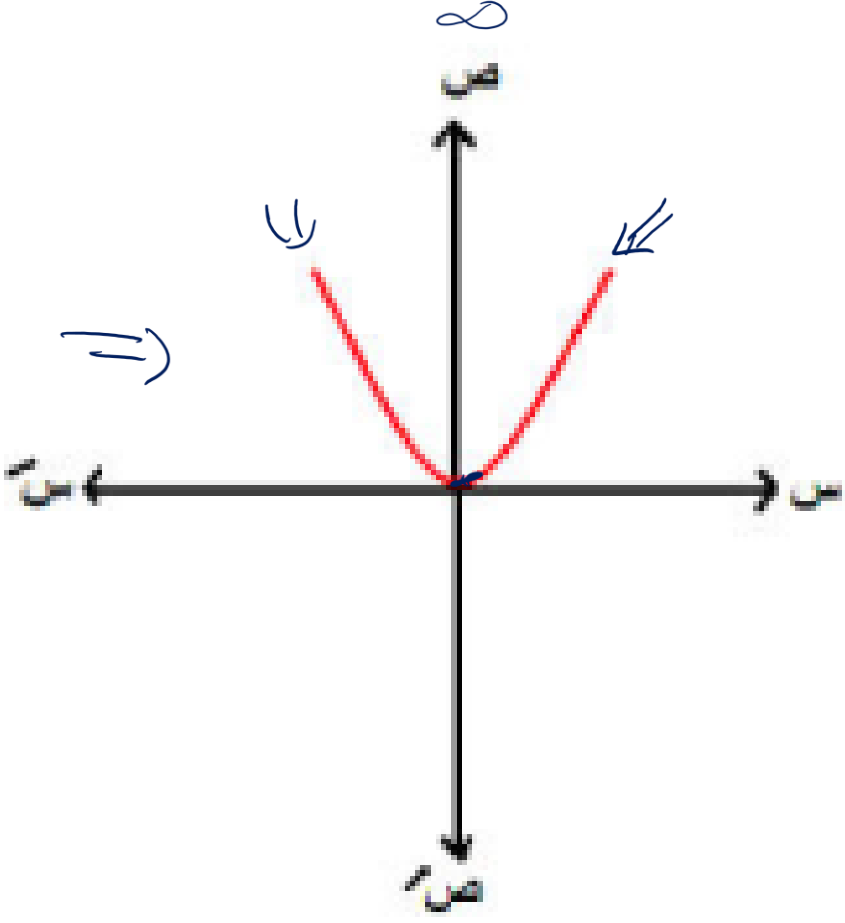
المدى : $[-\infty, 0]$

النوع : زوجية ليست أحادية

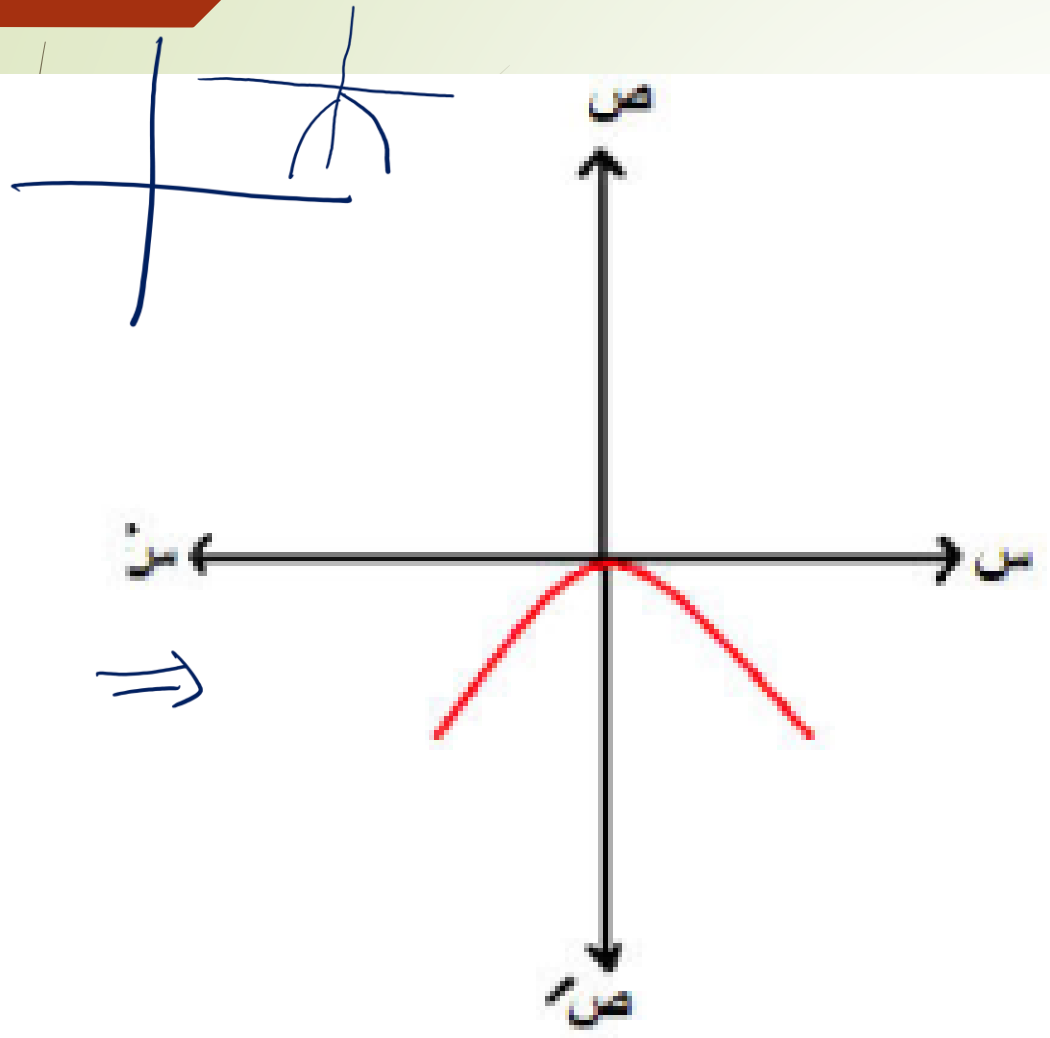
الأطراف :

تناقصية $[-\infty, 0]$

تزايدية $[0, \infty]$



$f(x) = -\sqrt[3]{x} + 2$ (٤، ٣)



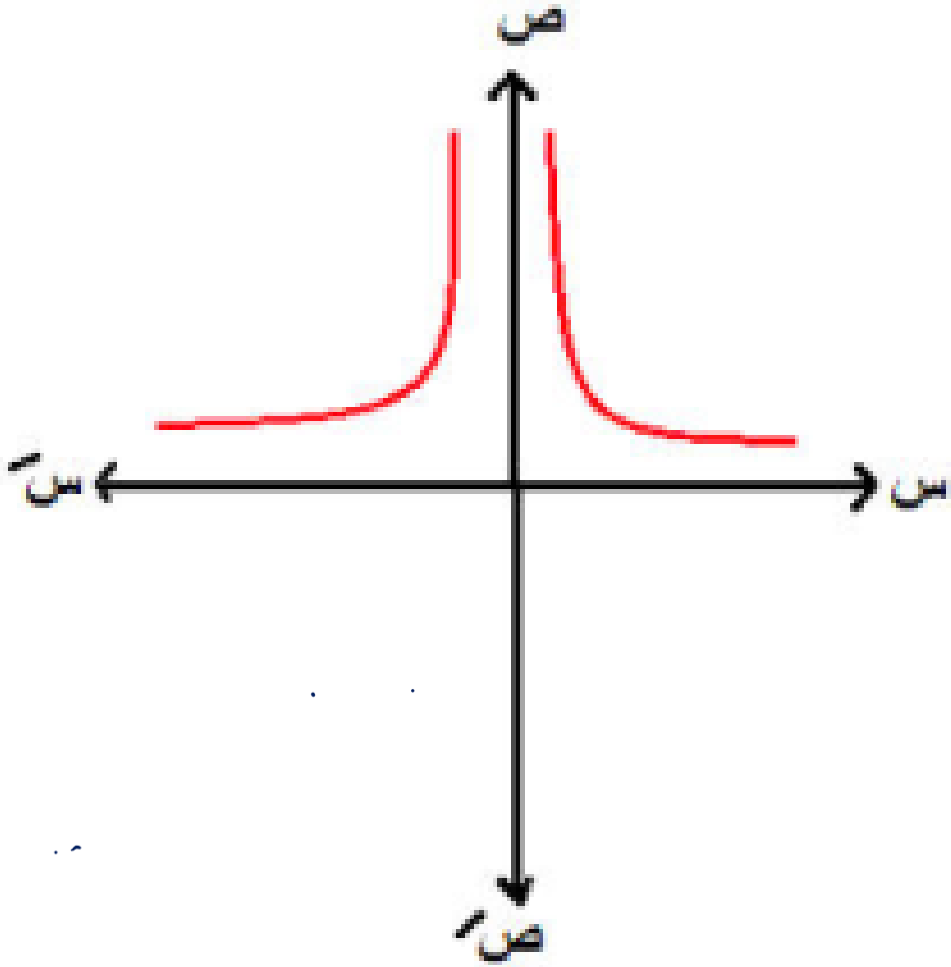
- المجال : ح
- المدى : $]-\infty, 0]$
- النوع : زوجية - ليست أحادية
- الأطراف : تزايدية $]-\infty, 0]$
- تناقصية $]0, \infty[$

الفكرة الخامسة
دالة كسرية داخل مقياس

بترسم دالتين وتأخذ اللي فوق في حالة الموجب
أو اللي تحت في حالة السالب

$$\frac{1}{s} = \text{د(س)}$$

٣



المجال :

ح - {0}

المدى :

[-∞ ، ∞]

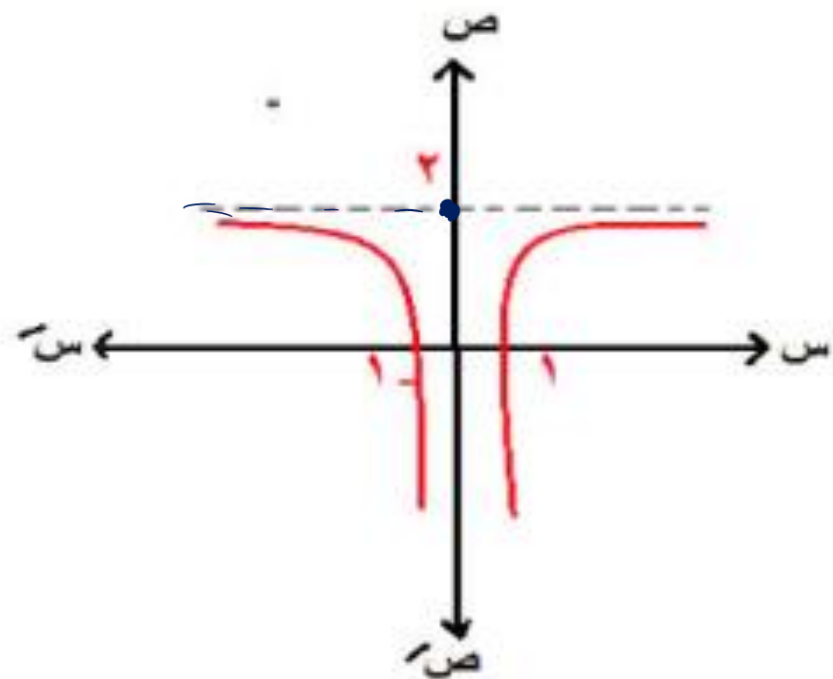
النوع :

زوجية

ليست أحادية

$$2 + \frac{1}{|s|} = (s)$$

رأس المنحني (٢، ٠) ولكن لأسفل



الأطراد :

تناقصية | - ∞ ، ٠ |
تزايدية | ∞ ، ٠ |

$$\left. \begin{array}{l} s \leq 0 \\ s > 0 \end{array} \right\} 2 + \frac{1}{|s|} = (s)$$

المجال : ح - { ٠ }

المدى : | - ∞ ، ٢ |

النوع :

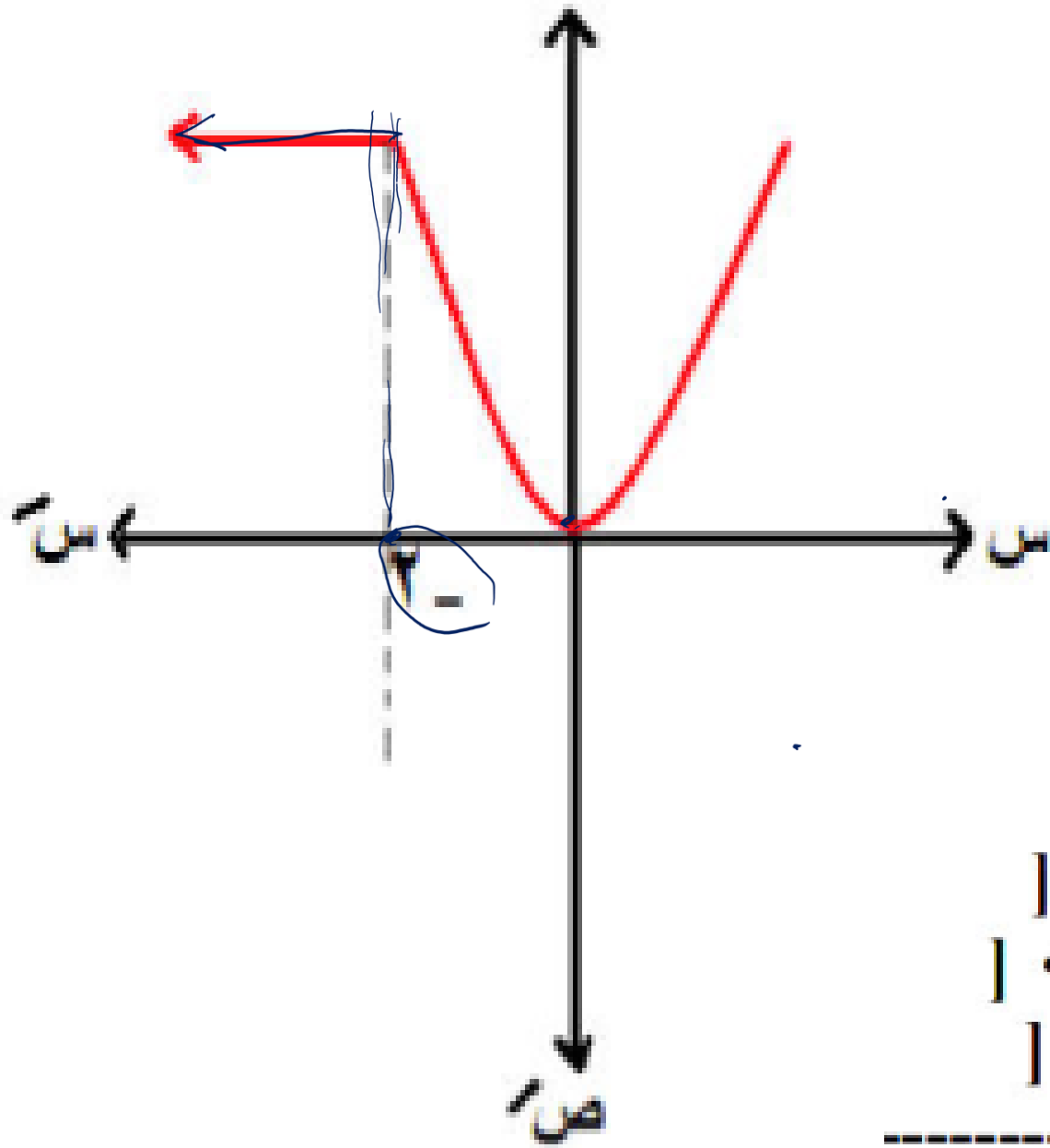
زوجية

ليست أحادية

الفكرة السادسة الدالة متعددة التعريف

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} > \text{٢} \\ \text{س} < \text{٢} \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

١



ثابتة [-∞ ، -2]
 تناقصية [-2 ، 0]
 تزايدية [0 ، ∞]

المجال : ح
 المدى :
 [0 ، ∞]
 النوع :
 ليست زوجية
 ليست فردية
 ليست أحادية
 الأضداد :

آخر فكرة تعديل قاعدة الدالة

١ استخدم منحنى $d(s) = s^2$ في تمثيل :

$$(1) \quad v(s) = (s+1) d$$

$$v(s) = (s+1) d$$

رأس المنحني $(-1, 0)$

$$r(2) = (s) + 2$$

$$r(2) + s = (s) + 2$$

رأس المنحني (2 ، 0)

وارسمي المنحني أنتي يا دكتور

٢ استخدم منحنى $d(s) = s^3$ في تمثيل :

$$r(2) = (s) = -s^3 + 2$$

$r(s) = -s^3 + 2$
رأس المنحنى $(0, 2)$ وهكذا

$$r(1) = (s) = (s - 1)^3$$

$r(s) = (s - 1)^3$
رأس المنحنى $(1, 0)$ وهكذا

مثل ثم أوجد المجال - المدي - النوع -
الأطراد :

$$(١) \text{ د (س) = س}^٢$$

$$(٢) \text{ د (س) = -س}^٢$$

$$(٣) \text{ د (س) = (س + ١) - ٢}$$

$$(٤) \text{ د (س) = - (س + ١) + ٣}$$

$$(٥) \text{ د (س) = - (س - ٢) + ٣}$$

$$(٦) \text{ د (س) = - (س - ٢) + ١}$$

$$(٧) \text{ د (س) = -س}^٢ + ١$$

$$(٨) \text{ د (س) = (س + ٢) + ٣}$$

$$(٩) \text{ د (س) = (س - ٢) + ٢}$$

$$(١٠) \text{ د (س) = س}^٣$$

$$(١١) \text{ د (س) = -س}^٣$$

$$(١٢) \text{ د (س) = س}^٣ - ٣$$

$$(١٣) \text{ د (س) = س}^٢ + ٤س + ٢$$

$$(١٤) \text{ د (س) = ٢ - س}^٣$$

مثل ثم أوجد المجال - المدي - النوع -
الأطراد :

$$(١) د (س) = \frac{١}{س} \quad (٢) د (س) = - |س|$$

$$(٣) د (س) = ٢ - \frac{١}{١+س}$$

$$(٤) د (س) = |س - ١| + ٢$$

$$(٥) د (س) = \frac{١}{س - ٣}$$

$$(٦) د (س) = |س| + ٢$$

$$(٧) د (س) = \frac{٢س - ٥}{س - ٣}$$

$$(٨) د (س) = |س + ٢|$$

$$(٩) د (س) = \sqrt{١ + ٢س + س^٢}$$

$$(۱) \text{ د (س) = | س }^۲ - ۱ |$$

$$(۲) \text{ د (س) = | س }^۱ |$$

$$(۳) \text{ د (س) = | س }^۲ - ۲ |$$

$$(۴) \text{ د (س) = | س }^۱ |$$

$$(۵) \text{ د (س) = | س }^۲ |$$

$$(۶) \text{ د (س) = | س }^۱ + ۲ |$$

$$(۷) \text{ د (س) = | س }^۲ + ۲ |$$

$$(۸) \text{ د (س) = | س }^۱ - ۱ |$$

٩ مثل ثم أوجد المجال – المدي – النوع –
الأطراد :

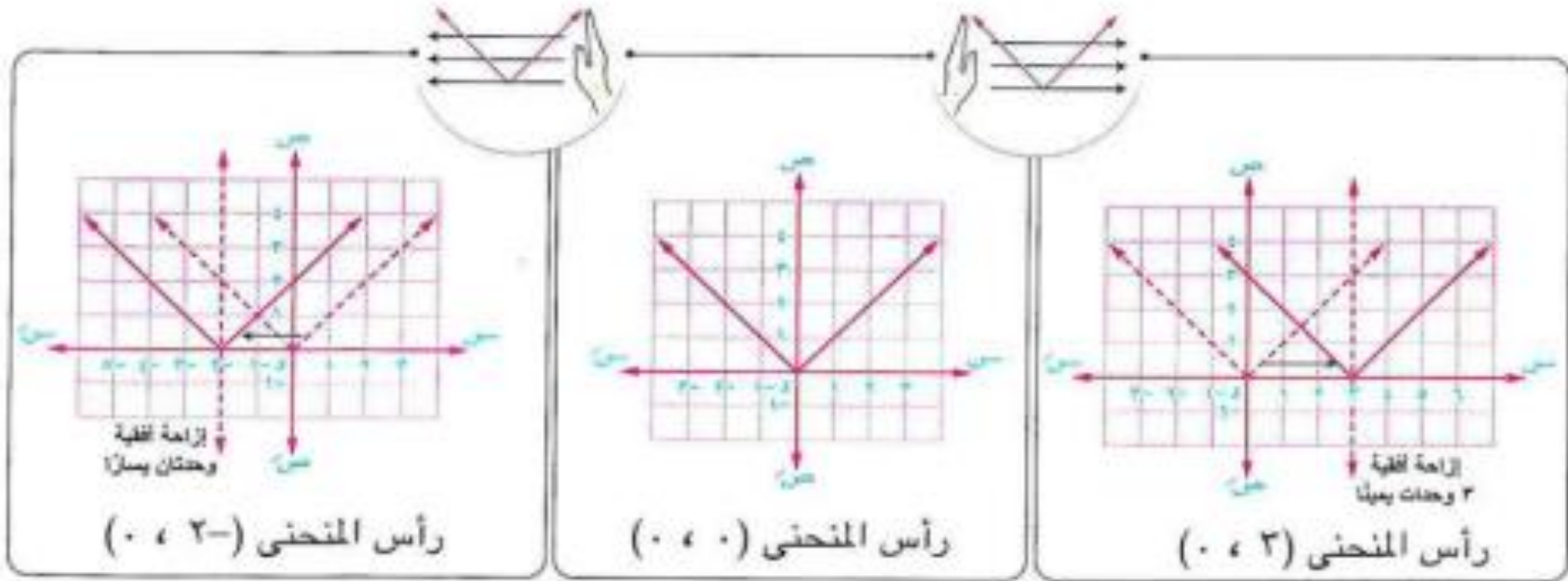
$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^{\cdot} < \text{س}^{\cdot} \\ \text{س}^{\cdot} > \text{س}^{\cdot} \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{س}^{\cdot} \\ \text{س}^{\cdot} > \text{س}^{\cdot} \end{array} \right\} = \text{د(س)}$$

الدالة الأساسية



$$|س + ٢| = ص \xleftarrow[\text{وحداتان يسارًا}]{\text{إزاحة أفقية}} |س| = ص \xrightarrow[\text{٢ وحدات يمينًا}]{\text{إزاحة أفقية}} |س - ٢| = ص$$



بصفة عامة .

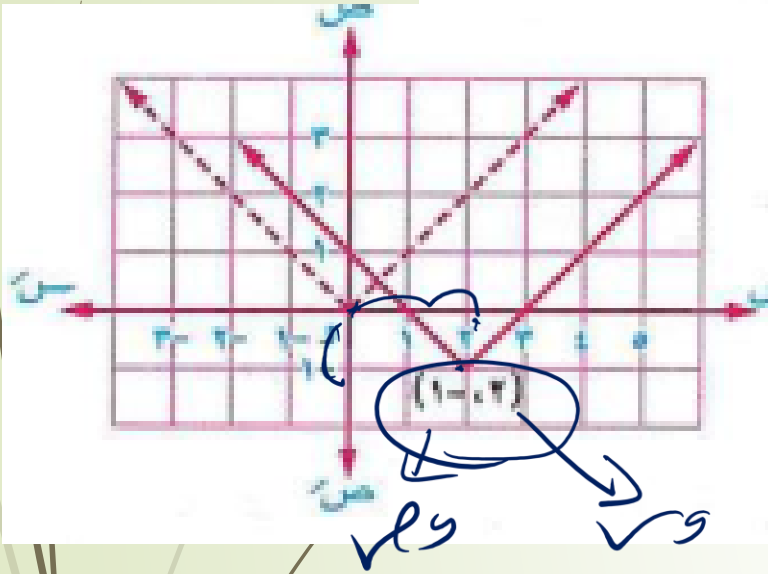
لأى دالة $د$ يكون المنحنى $ص = د(س + ٢)$ ، $ص = د(س - ٢)$ هو نفس المنحنى $ص = د(س)$

$\left. \begin{array}{l} \text{و } س \text{ (يمينًا) عندما } ٢ > ٠ \\ \text{و } س \text{ (يسارًا) عندما } ٢ < ٠ \end{array} \right\}$
 بإزاحة أفقية قدرها $|٢|$ وحدة طول في اتجاه :

بصفة عامة .

لأى دالة d يكون المنحنى $ص = d(s + 1) + b$ حيث a ، $b \in \mathbb{R}$ - $\{0\}$ هو نفس المنحنى $ص = d(s)$
بإزاحة أفقية مقدارها $|a|$ وحدة طول في اتجاه $\overleftarrow{ص}$ إذا كان $a > 0$ أو في اتجاه $\overrightarrow{ص}$ إذا كان $a < 0$.
ثم إزاحة رأسية مقدارها $|b|$ وحدة طول في اتجاه $\overleftarrow{ص}$ إذا كان $b < 0$ ، أو في اتجاه $\overrightarrow{ص}$ إذا كان $b > 0$.

استخدم منحنيات الدوال الأساسية لرسم منحنى الدالتين المعرفتين بالقاعدتين الآتيتين ومن الرسم عين مجال ومدى كل دالة وابحث اطرافها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك :



$$١ \quad f(x) = |x - 2| - 1$$

$$٢ \quad f(x) = 2 + (x - 2)^2$$

منحنى الدالة f هو نفس منحنى الدالة $d : d(x) = |x - 1|$
 بإزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه x ثم إزاحة رأسية وحدة
 واحدة في اتجاه y

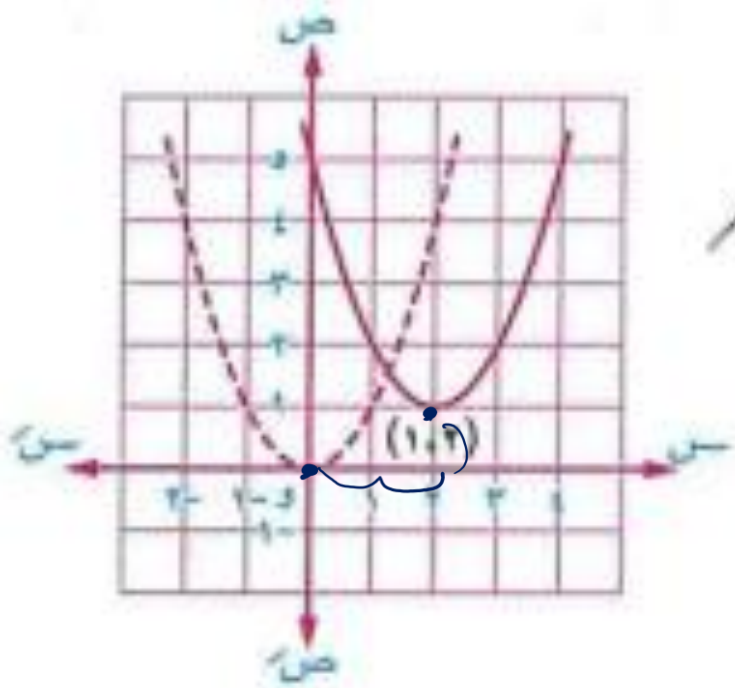
* مجال $f = \mathbb{R}$ ، مدى $f =]-1, \infty[$

* الدالة f تناقصية في $]-\infty, 2[$ وتزايدية في $]2, \infty[$

* الدالة f ليست زوجية وليست فردية.

$$\therefore f(x) = (x-2)^2 + 1$$

$$\therefore (x-2)^2 = (x-2)^2 \quad \boxed{2}$$



منحنى الدالة f هو نفس منحنى الدالة $d : d(x) = x^2$ بإزاحة أفقية 2 وحدة في اتجاه \overrightarrow{OS} ثم إزاحة رأسية وحدة واحدة في اتجاه \overrightarrow{OS}

* مجال $f = \mathbb{R}$ ، مدى $f =]-\infty, 1]$

* الدالة f تناقصية في $]-\infty, 2]$ وتزايدية في $]2, +\infty[$

* الدالة f ليست زوجية وليست فردية.

مثال ٢

استخدم منحنى الدالة d : $d(s) = \frac{1}{s}$ لتمثيل الدوال m ، g ، h حيث :

1 $m(s) = \frac{1}{2-s} + 1$
 2 $g(s) = \frac{1}{s} + 3$
 3 $h(s) = \frac{1-s^2}{1-s}$

ومن الرسم حدد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرافها.

(١٢)

1 منحنى الدالة m هو نفس منحنى الدالة d بإزاحة أفقية قدرها ٢ وحدة في اتجاه $+$ s ثم إزاحة رأسية قدرها وحدة واحدة في اتجاه $+$ s

2 منحنى الدالة g هو نفس منحنى الدالة d بإزاحة رأسية مقدارها ٣ وحدات في اتجاه $+$ s

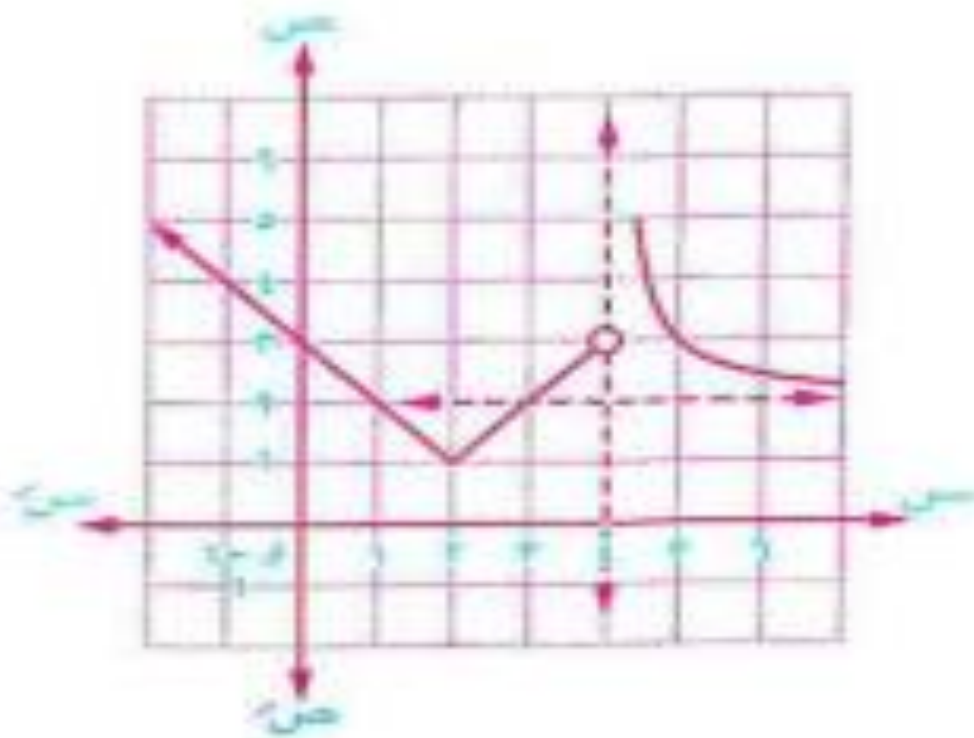
3 $h(s) = \frac{1-s^2}{1-s} = \frac{1+(1-s)}{1-s} = \frac{1+1-s}{1-s} = \frac{2-s}{1-s} = \frac{1}{1-s} + 2$

منحنى الدالة h هو نفس منحنى الدالة d بإزاحة أفقية وحدة واحدة في اتجاه $+$ s ثم إزاحة رأسية ٢ وحدة في اتجاه $+$ s

$$\left. \begin{array}{l} |x-2|+1, \quad x > 4 \\ 2+\frac{1}{x-4}, \quad x < 4 \end{array} \right\} = D(x)$$

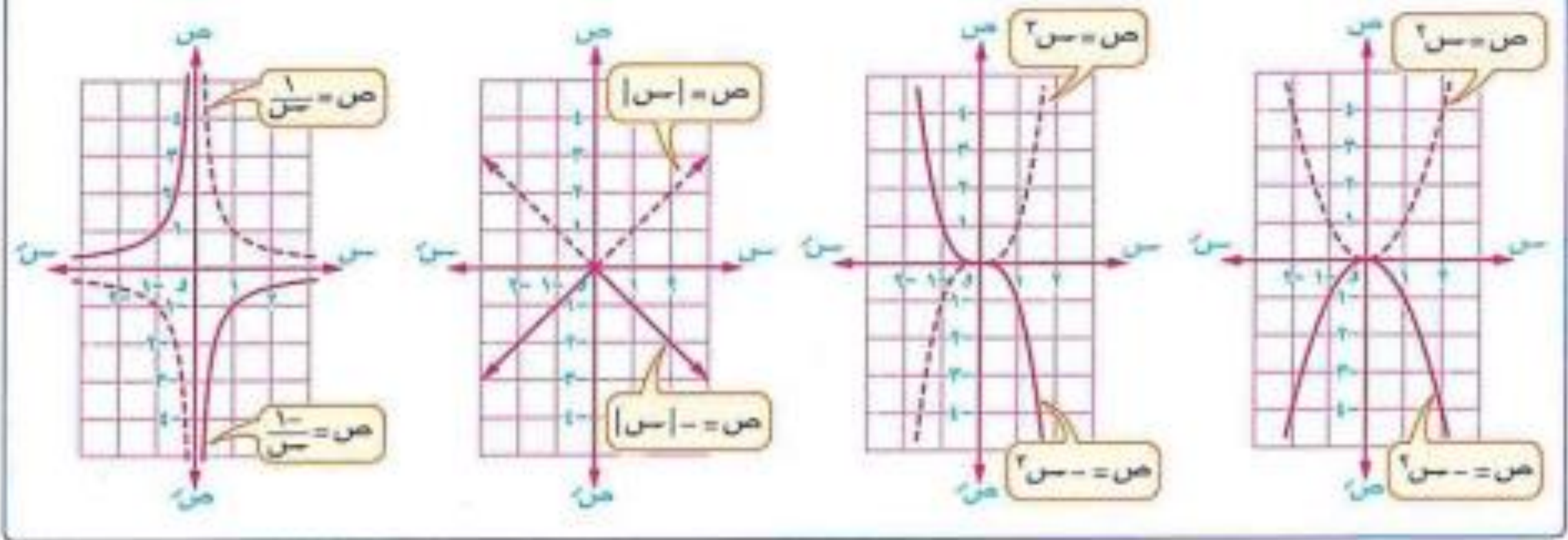
ومن الرسم أوجد مجال ومدى الدالة

واستنتج اطرادها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

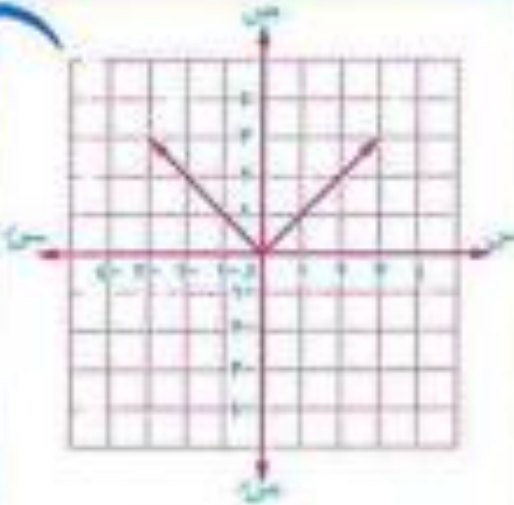
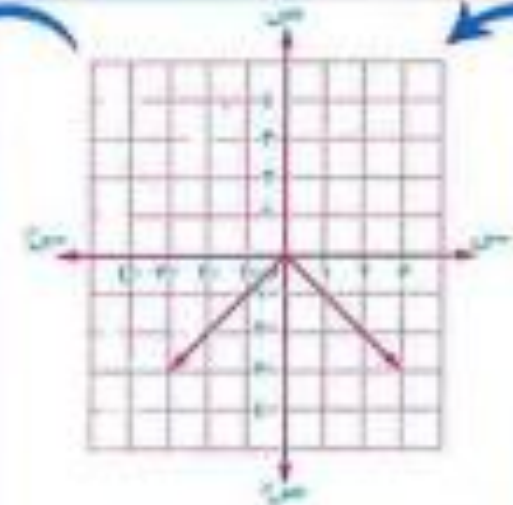
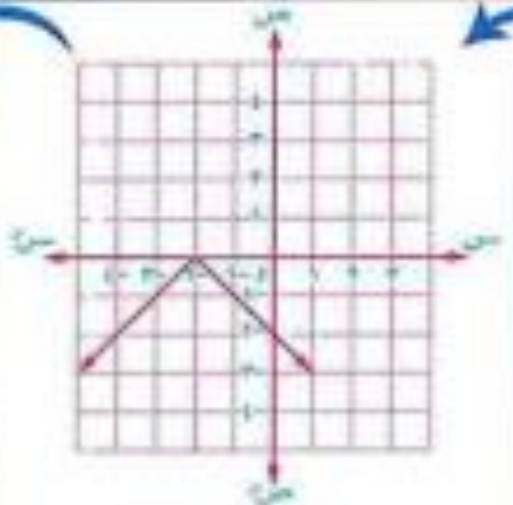
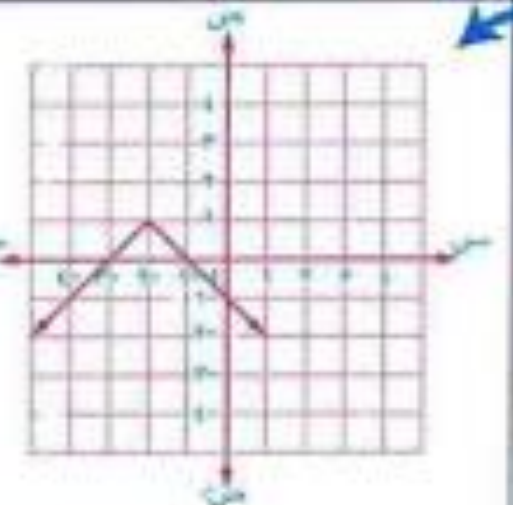


الحل

لأى دالة $y = f(x)$ يكون المنحنى $y = -f(x)$ هو نفس المنحنى $y = f(x)$ بالانعكاس في محور السينات.



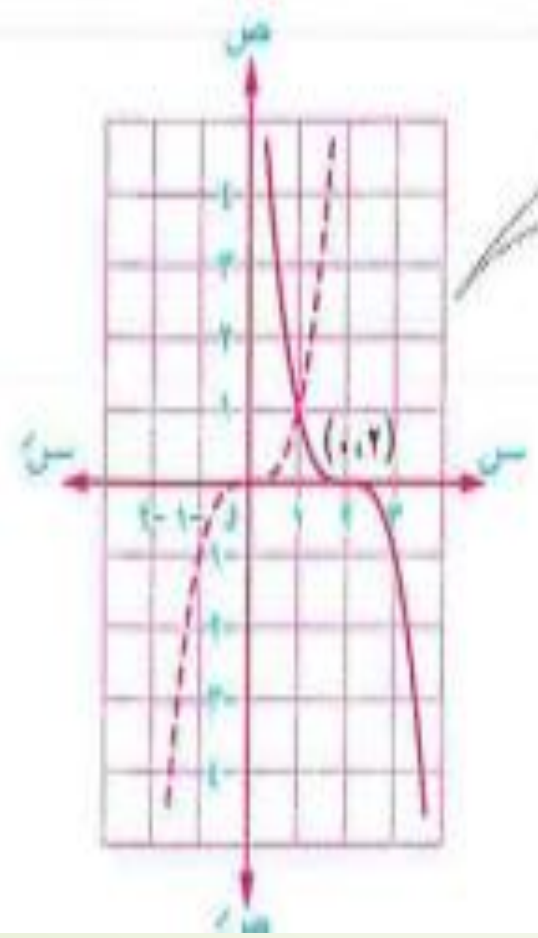
فمثلاً : من منحنى الدالة الأساسية $y = |x|$ نحصل على منحنى الدالة $y = -|x + 2| + 1$ كالآتي :

			
$y = x $	$y = - x $	$y = - x + 2 $	$y = - x + 2 + 1$
الدالة الأساسية	الانعكاس في محور السينات	إزاحة أفقية وحدتان يساراً	إزاحة رأسية وحدة واحدة لأعلى

باستخدام منحنيات الدوال الأساسية ارسم منحنيات الدوال $م$ ، $ع$ ، $هـ$ حيث:

١ $م(س) = (س - ٢)^٢$ ٢ $ع(س) = ٣ + \frac{١}{س - ٢}$ ٣ $هـ(س) = ٤ - س - س^٢ - ٣$

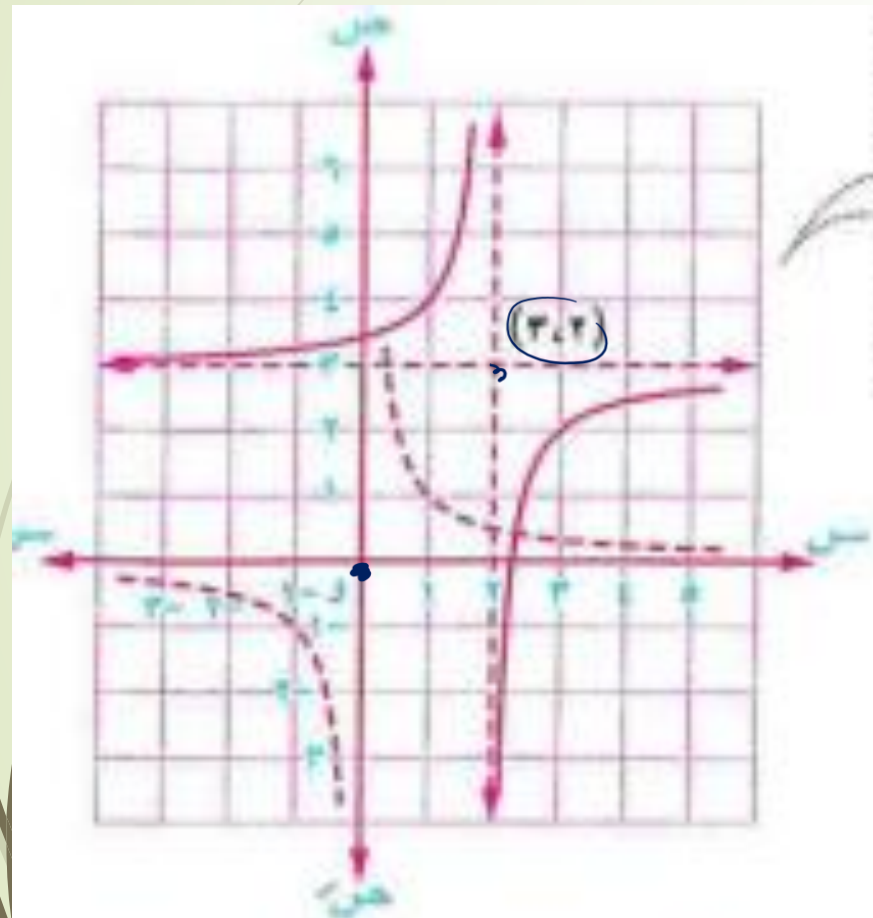
ومن الرسم بين مدى كل دالة وابحث اطرافها وتمائلها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.



١ منحني الدالة $م$ هو نفس منحنى الدالة $د(س) = س^٢$ بالانعكاس في محور السينات ثم إزاحة أفقية ٢ وحدة في اتجاه $س$

- * مدى $م = ع$
- * الدالة $م$ تناقصية على مجالها $ع$
- * الدالة $م$ متماثلة حول النقطة $(٠, ٢)$
- * الدالة $م$ ليست زوجية وليست فردية.

$$2 + \frac{1}{2-s} = 2 + \frac{1}{(2-s)-} = 2 + \frac{1}{2+s} = (س) \text{ ع} \quad \boxed{2}$$



منحنى الدالة $ع$ هو نفس منحنى الدالة $د : د(س) = \frac{1}{س}$ بالانعكاس في محور السينات متبوعاً بإزاحة أفقية وحدتين في اتجاه $\overleftarrow{س}$ ثم إزاحة رأسية 2 وحدات في اتجاه $\overleftarrow{ع}$

$$* \text{ مدى } ع = ع - \{2\}$$

* الدالة $ع$ تزايدية في الفترة $]-\infty, 2[$

وتزايدية أيضاً في الفترة $]2, \infty[$

* الدالة $ع$ متماثلة حول النقطة $(2, 2)$

* الدالة $ع$ ليست زوجية وليست فردية.

لأي دالة d يكون المنحني $v = d(u)$ حيث $u \in \mathcal{U}$ *
 • تمدد رأسي للمنحني $v = d(u)$ إذا كان $0 < d < 1$ • انكماش رأسي للمنحني $v = d(u)$ إذا كان $0 < d < 1$ •

فمثلاً : في الشكل المقابل :

* منحني الدالة $v = d(u)$: $v = 2|u|$

هو تمدد رأسي لمنحني الدالة $v = |u|$: $v = |u|$

لأن : $0 < d < 1$

أي أنه لكل $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ بيان d

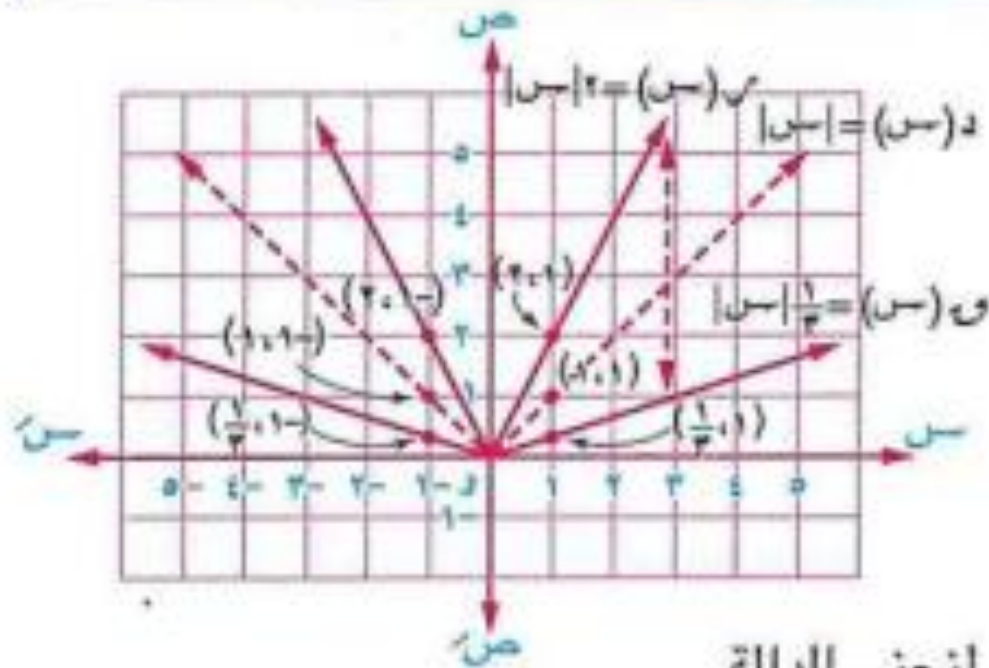
يكون $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ بيان $v = 2|u|$

* منحني الدالة $v = d(u)$: $v = \frac{1}{2}|u|$ هو انكماش رأسي لمنحني الدالة

$v = |u|$: $v = |u|$

لأن : $0 < d < 1$

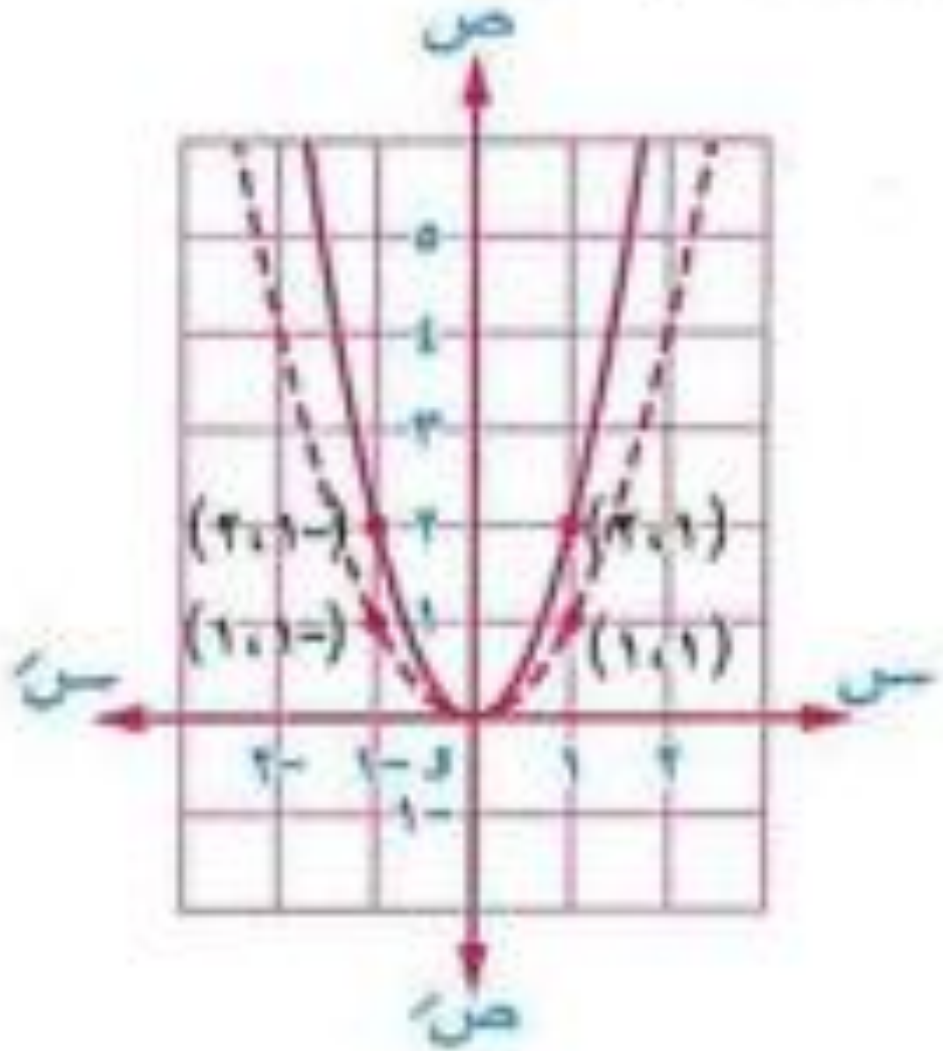
أي أنه لكل $(u, v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$ بيان d يكون $(u, \frac{1}{2}v) \in \mathcal{U} \times \mathcal{V}$

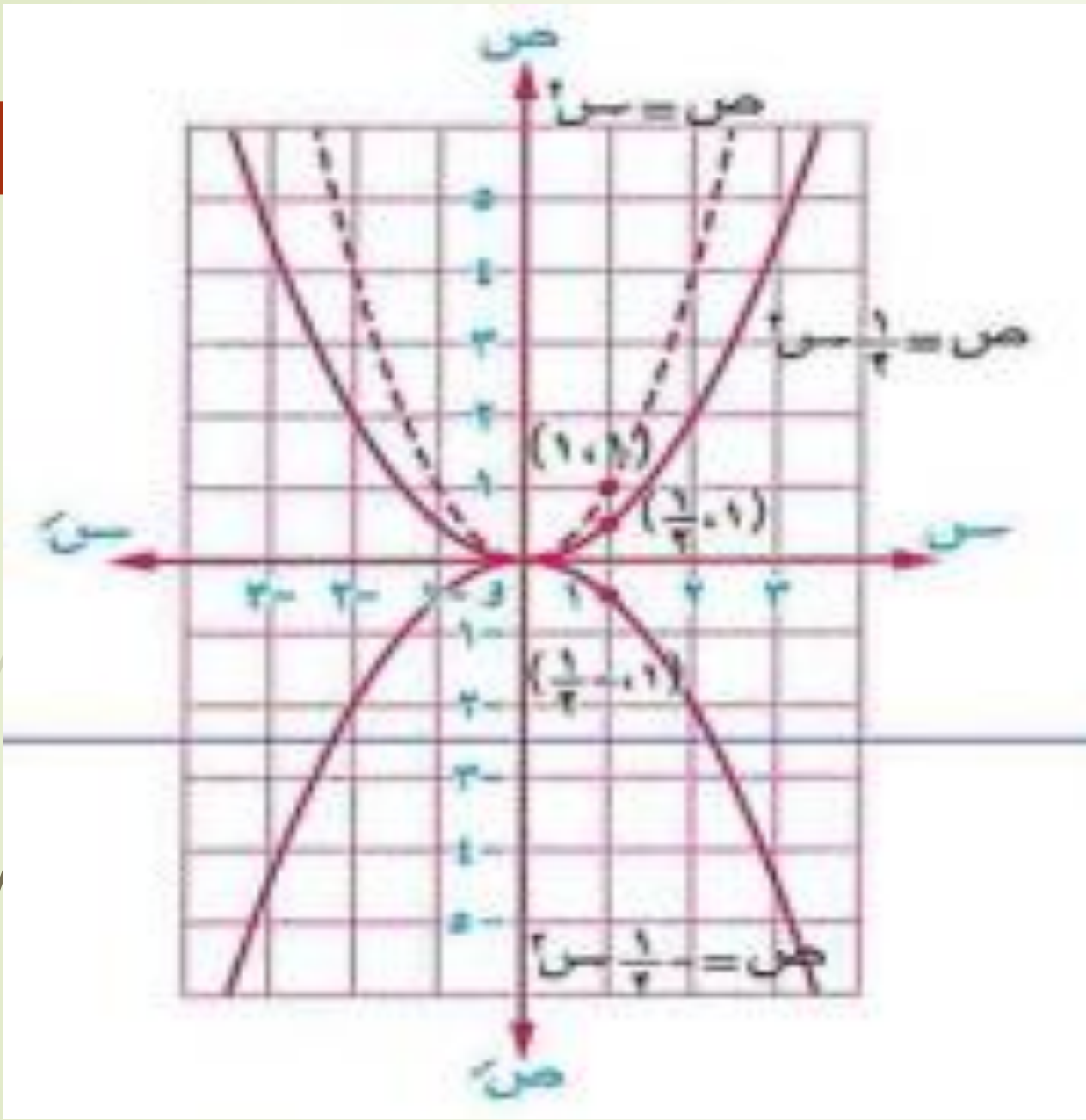


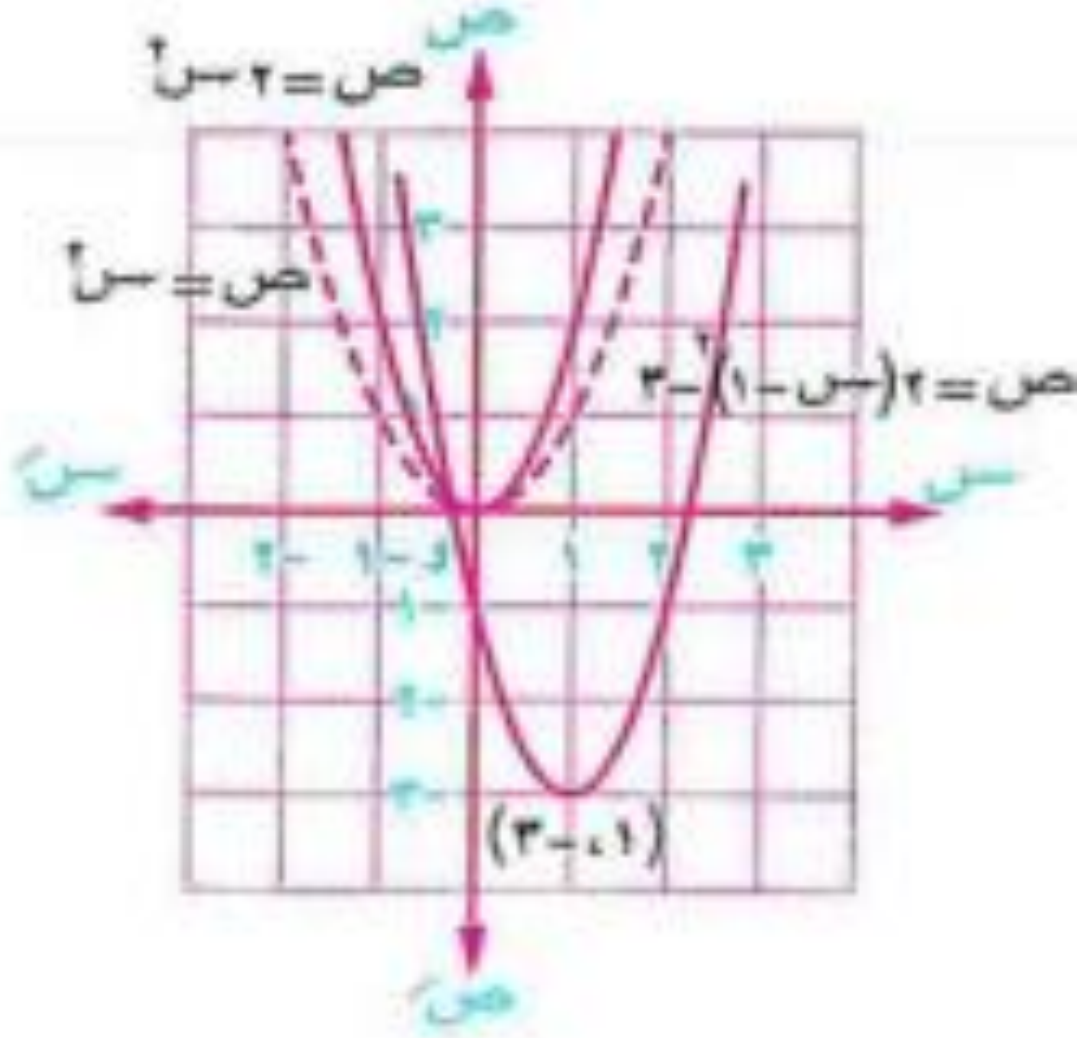
استخدم منحني الدالة d : $d(s) = s^2$ في رسم كل من المنحنيات الآتية :

$$\boxed{1} \quad s \quad (s) = 2 \quad \boxed{2} \quad s \quad (s) = \frac{1}{4} \quad \boxed{3} \quad s \quad (s) = 2 - (s - 1) - 2$$

ومن الرسم عين مدى كل منها وابحث اطرافها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك.

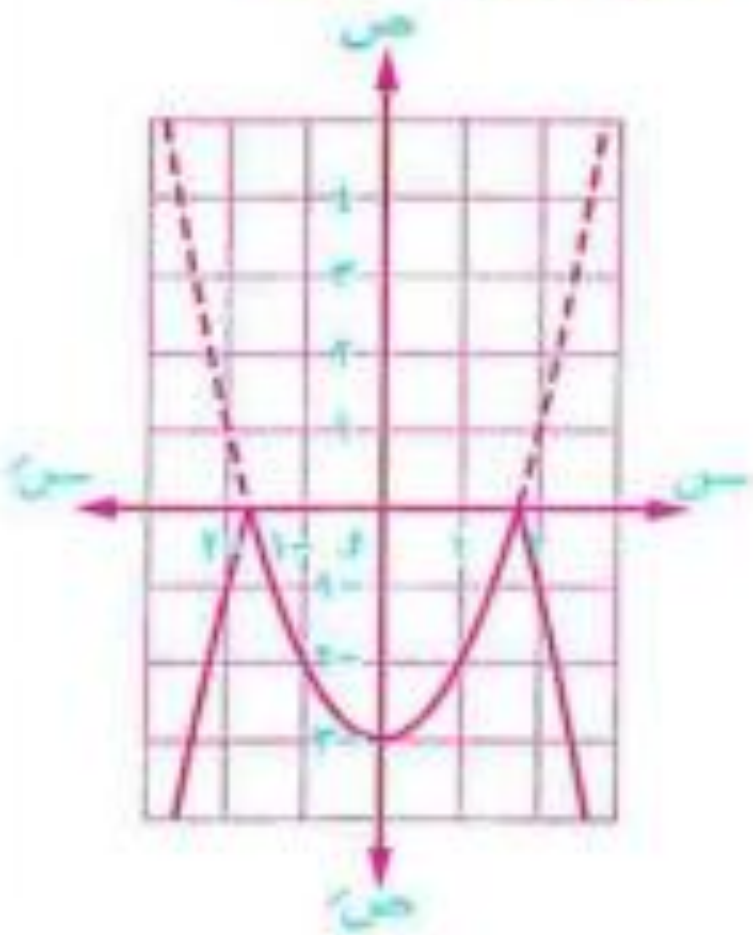






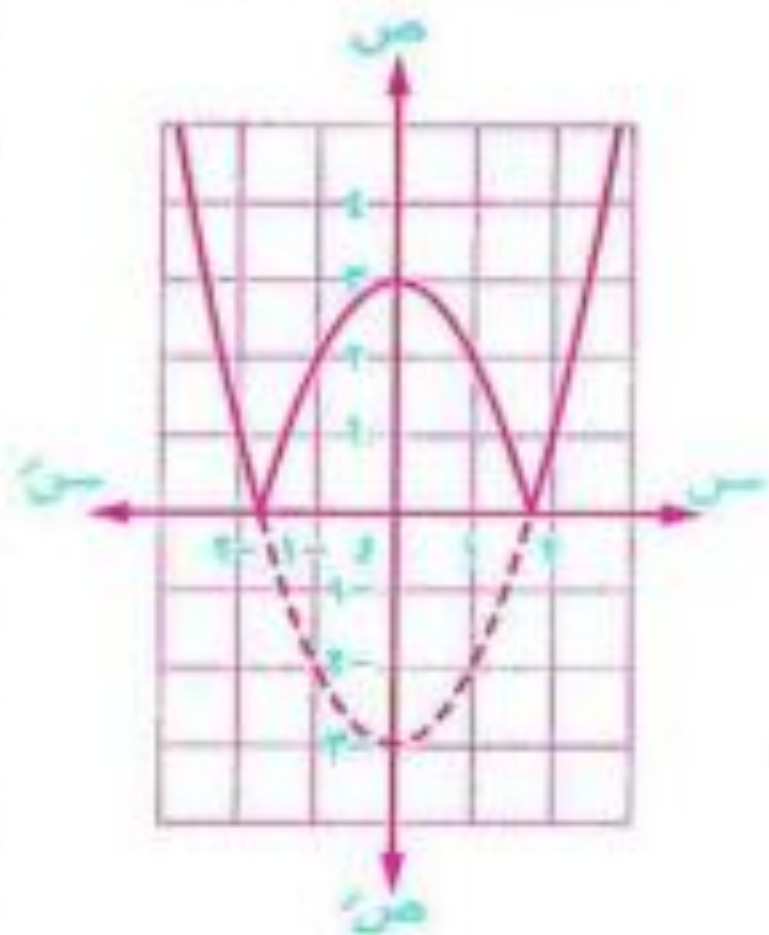
$$| -s^2 - 3 | = -s^2 - 3$$

تمثل بيانيًا كالتالي :



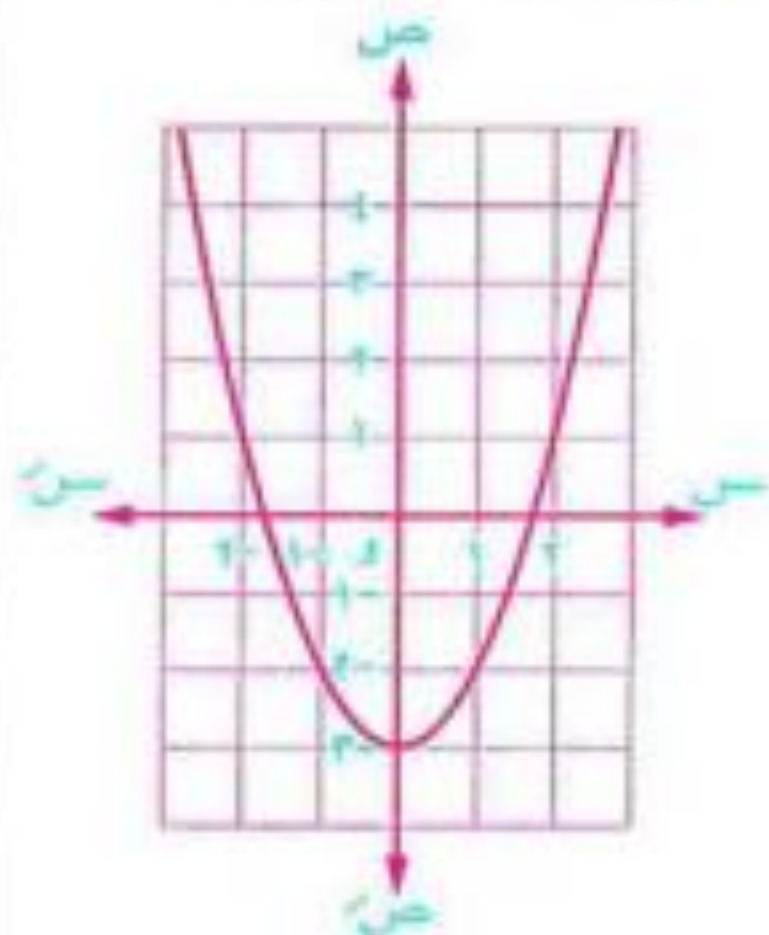
$$| -s^2 - 3 | = -s^2 - 3$$

تمثل بيانيًا كالتالي :



$$-s^2 - 3 = -s^2 - 3$$

تمثل بيانيًا كالتالي :

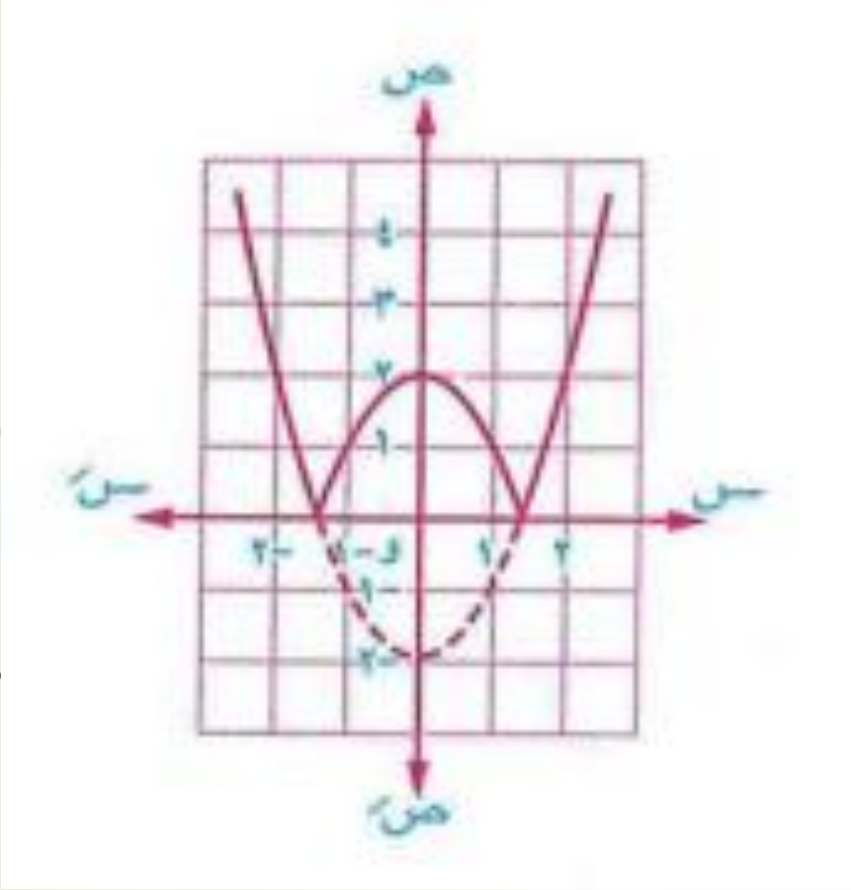


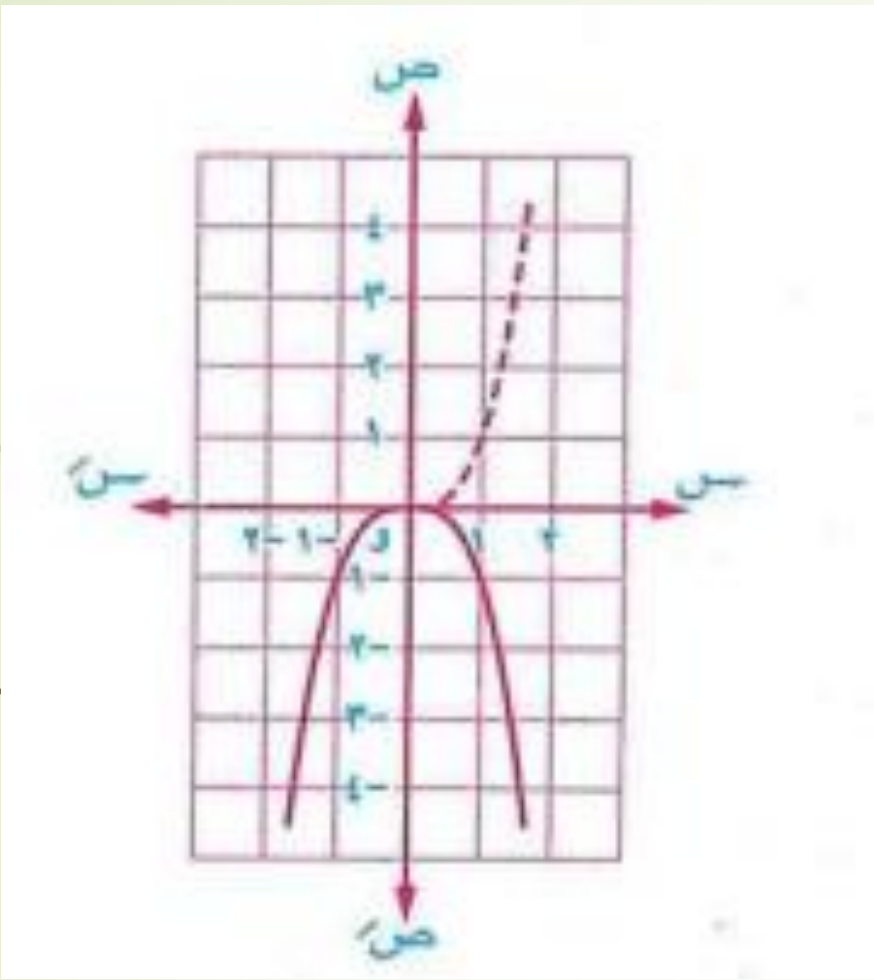
مثلاً :

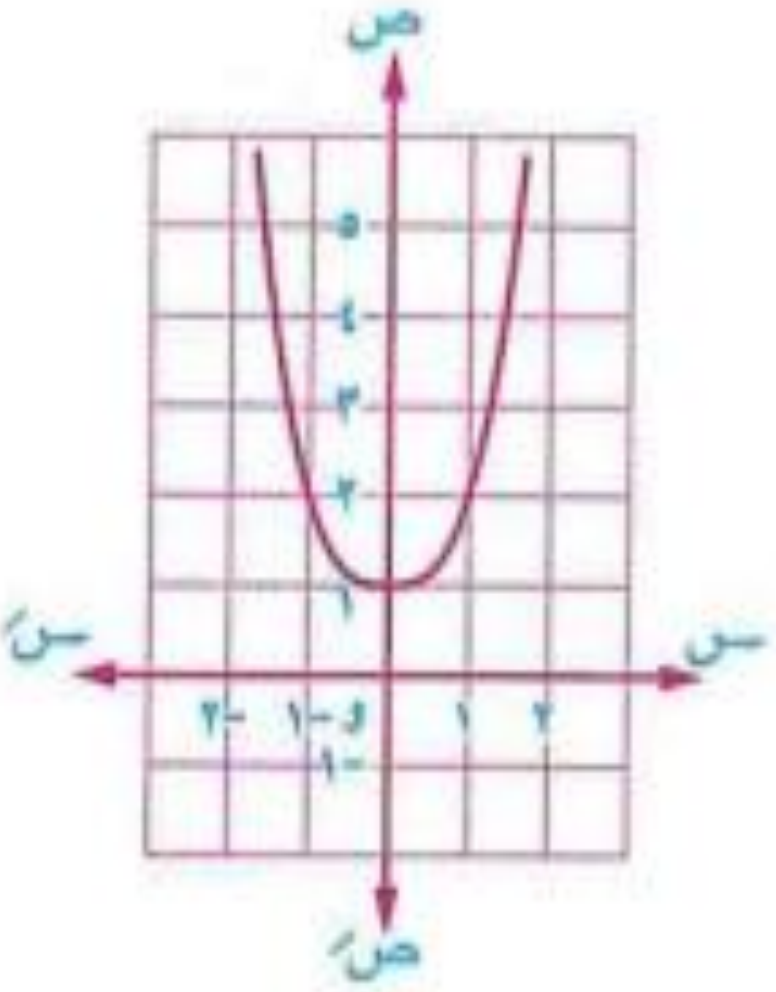
مثل بيانًا كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مداها وعين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية

أم غير ذلك :

$$\boxed{1} \quad d(s) = |s^2 - 2| \quad \boxed{2} \quad d(s) = -|s^2| \quad \boxed{3} \quad d(s) = |s^2| + 1$$







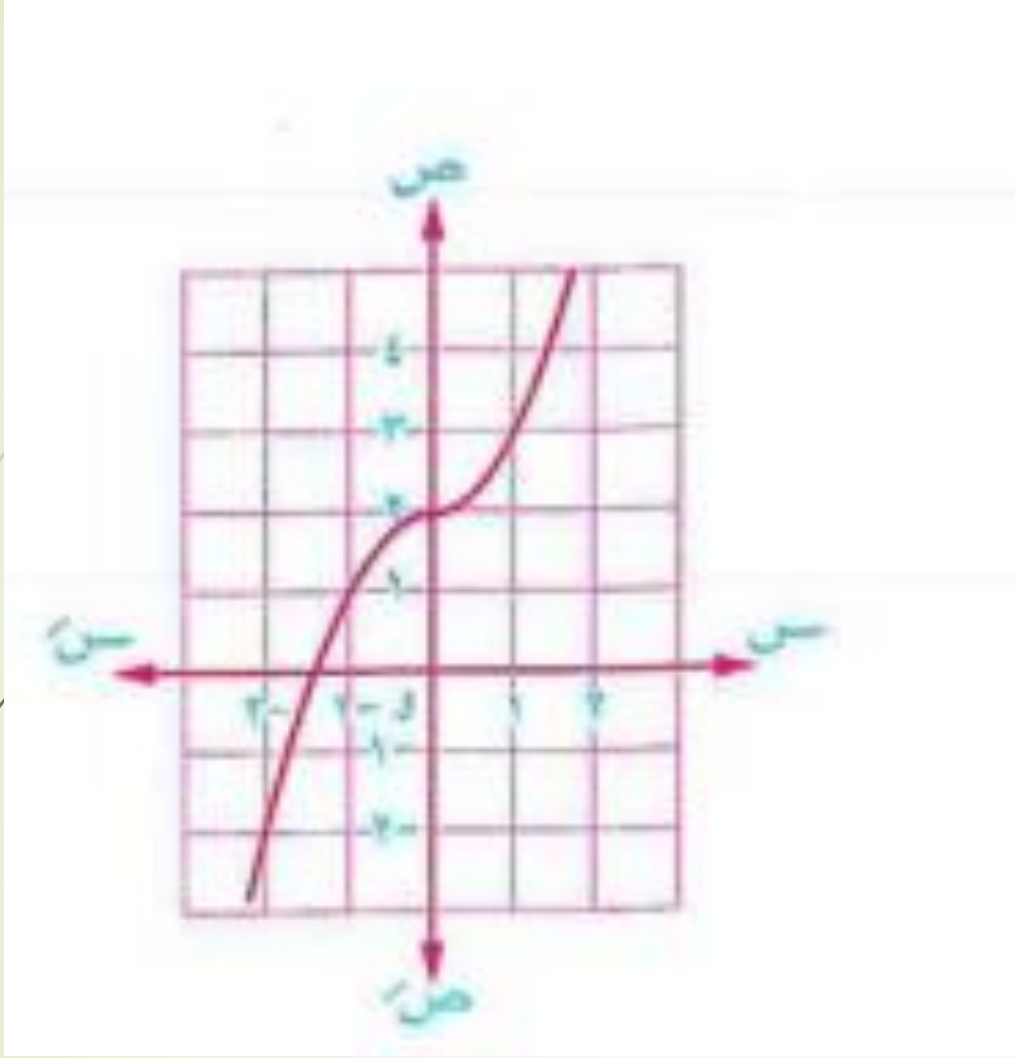
مثال ٧

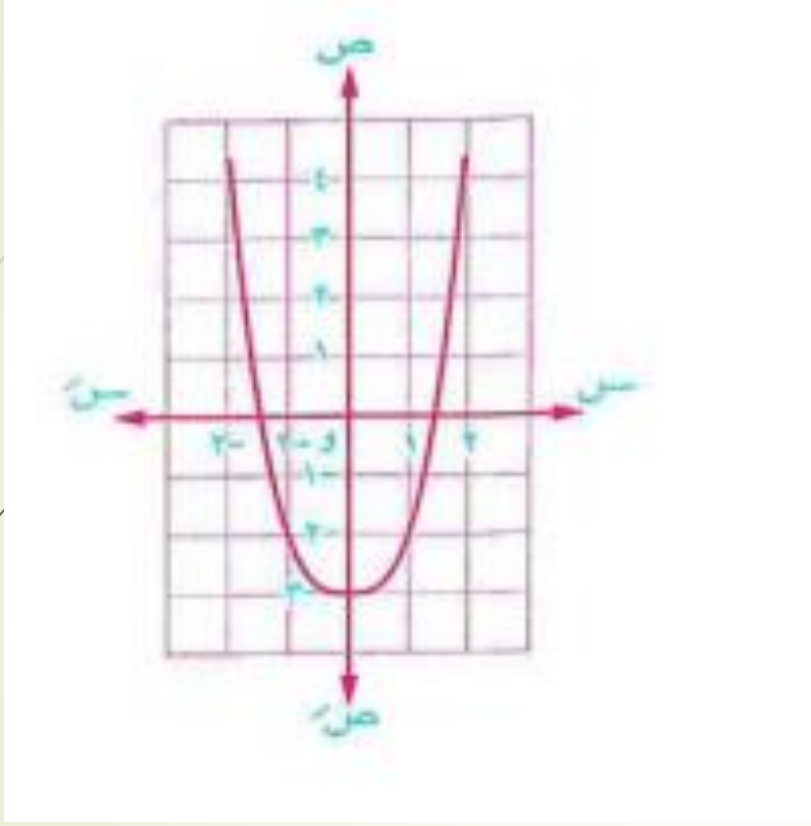
مثل بيانًا كلاً من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم أوجد مجال ومدى كل دالة وابحث اطرادها وتماثلها ونوعها من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

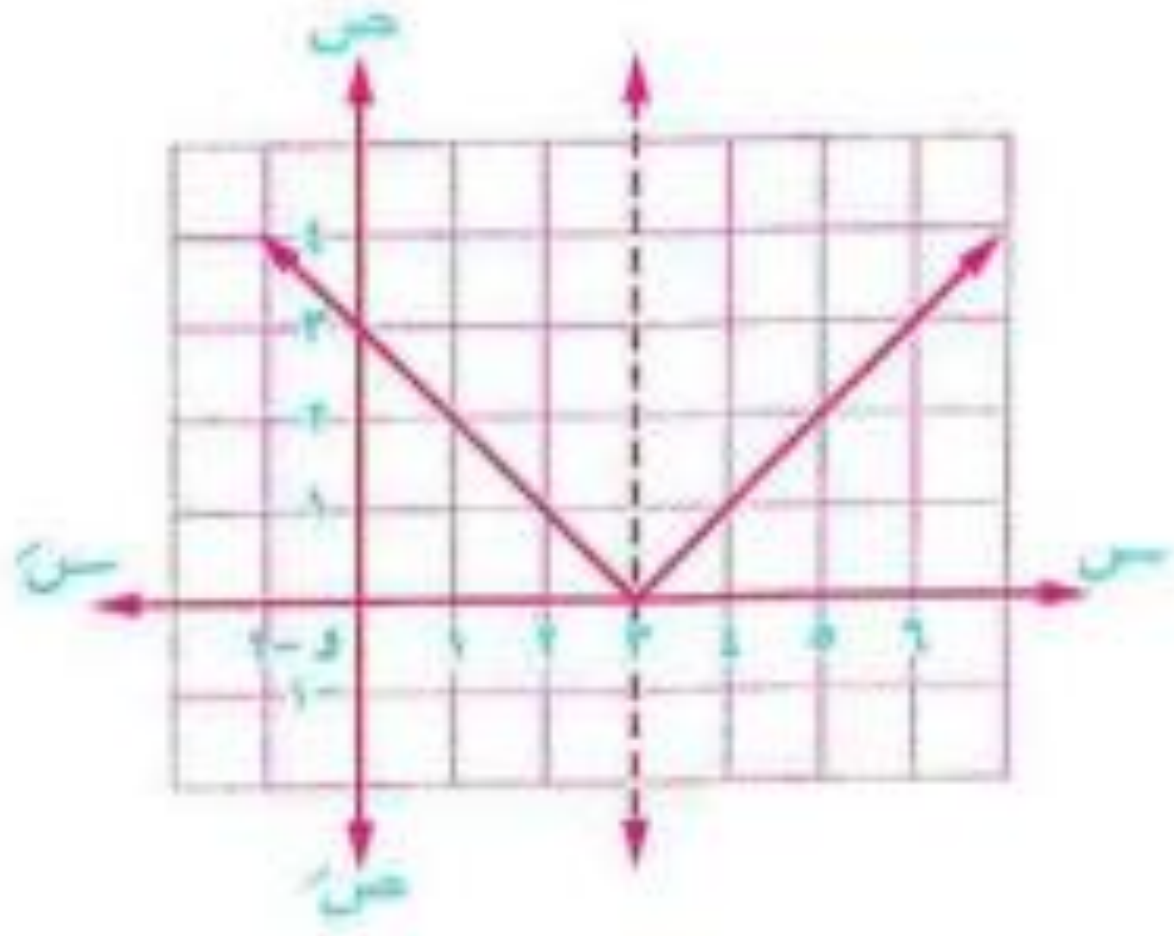
$$\boxed{2} \quad د (س) = س^2 |س| - 3$$

$$\boxed{1} \quad د (س) = س |س| + 2$$

$$\boxed{3} \quad د (س) = \sqrt{|س^2 - 6س + 9|}$$







ص = د (-س)

ص = د (-س)

ص = د (-س)

تكون

منحنى

الدالة

في محور الصادات

في محور السينات

في نقطة الأصل

صورة منحنى

الدالة د (-س)

بالانعكاس



استخدم منحنى الدالة d حيث $d = (s)$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداهما وابحث اطرافها ونوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

$$f(s) = (s-3)^2 \quad \text{②} \quad \text{📖}$$

$$f(s) = (s-1)^2 - 2 \quad \text{④}$$

$$f(s) = (s-2)^2 - 1 \quad \text{⑥}$$

$$f(s) = (s)^2 + 4 \quad \text{①} \quad \text{📖}$$

$$f(s) = (s-2)^2 \quad \text{③}$$

$$f(s) = (s-3)^2 + 1 \quad \text{⑤}$$

استخدم منحنى الدالة d حيث $d = (s)$ لتمثيل كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية ومن الرسم عين مجالها ومداه وابتحث اطرافها وبين نوعها من حيث كونها زوجية أم فردية أم غير ذلك واكتب نقطة تماثلها :

$$\textcircled{2} \quad r(s) = \frac{1-s}{2+s}$$

$$\textcircled{4} \quad r(s) = \frac{1-s}{3-4s}$$

$$\textcircled{6} \quad r(s) = \frac{s^2}{1+s}$$

$$\textcircled{8} \quad r(s) = \frac{1-s}{1-s^2}$$

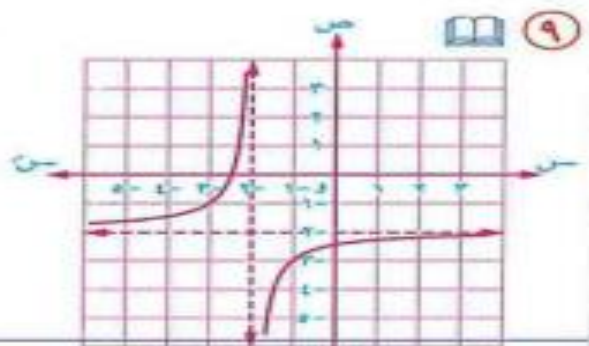
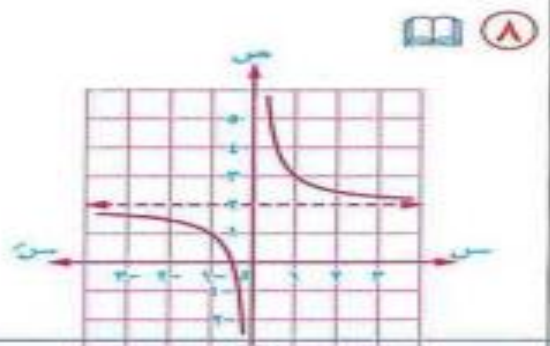
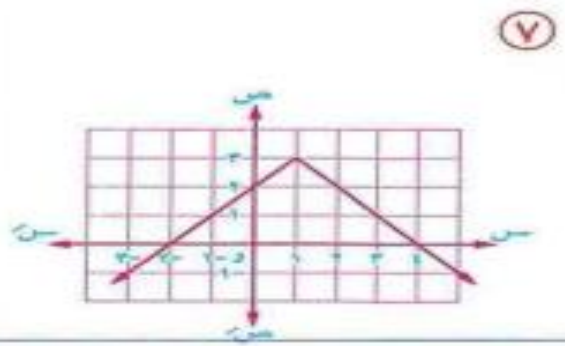
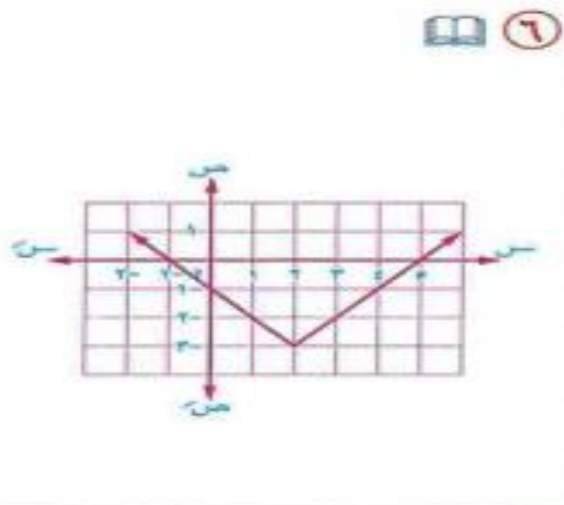
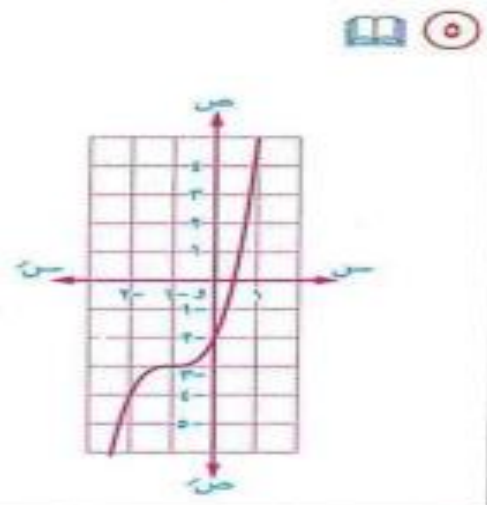
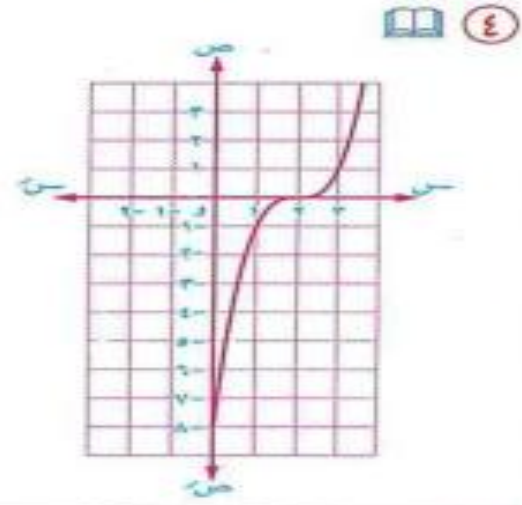
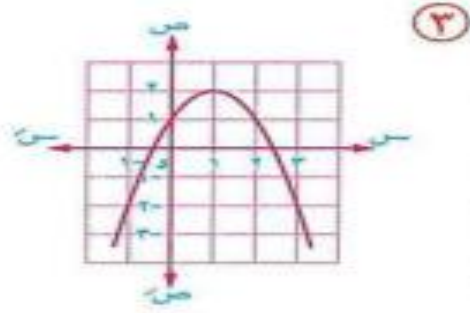
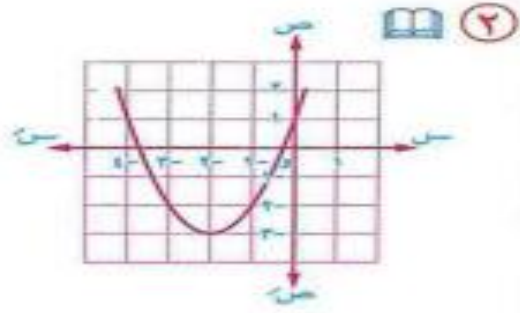
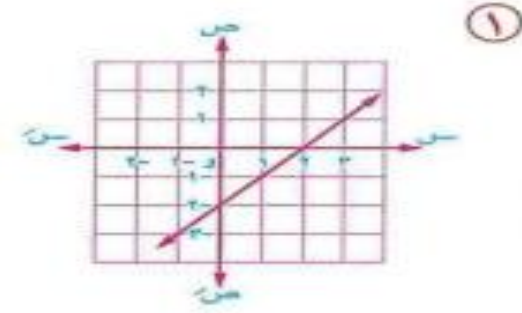
$$\textcircled{1} \quad r(s) = \frac{1}{2+s}$$

$$\textcircled{3} \quad r(s) = \frac{1}{2-s}$$

$$\textcircled{5} \quad r(s) = \frac{2-s}{2-s}$$

$$\textcircled{7} \quad r(s) = \frac{5-s^2}{2-s}$$

اكتب قاعدة الدالة الممثلة بيانيًا بكل من الأشكال الآتية :



الدرس السادس حل معادلات القيمة المطلقة

±

٦ إذا كان $|s| = 2$ فإن $s = 2 \oplus$

٧ إذا كان $|p| = |b|$

فإن $p = b$ أو $p = -b$

٨ ${}^2 p = {}^2(|p|)$

$|c+v-1| = \sqrt{(c+v-1)^2} = \sqrt{c^2+v^2-2c-2v+1}$

٩ $|p| = \sqrt[3]{p}$

١٠ إذا كان $|s| = s$

فإن $s \in [0, \infty)$

١١ إذا كان $|s| = -s$

فإن $s \in [-\infty, 0]$

١ $0 \leq |p|$

مقياس أي عدد هو عدد غير سالب

٢ $|b| \times |p| = |b \times p|$

$15 = |5| \times |3| = |15|$

٣ $|b| + |p| \geq |b+p|$

$|3| + |2| \geq |3+2|$

٤ $|p_-| = |p|$

٥ $|1-s| = |s-1|$

① الفكرة الأولى

مقياس = ثابت

$$p = |c - v|$$

$$p \pm = c - v$$

$v > c$ $v < c$

$$\begin{aligned} p &= c - v \\ p &= |c - v| \\ p &= v - c \end{aligned}$$

$$p = 2 = 3 - 1 = 2$$

② الفكرة الثانية

$$s + v = |c - v|$$

مثال

$$s + v = |c - v|$$

$$(s + v) \pm = c - v$$

$$\begin{aligned} s + v &= c - v \\ s + v + v &= c - v + v \\ s + 2v &= c \end{aligned}$$

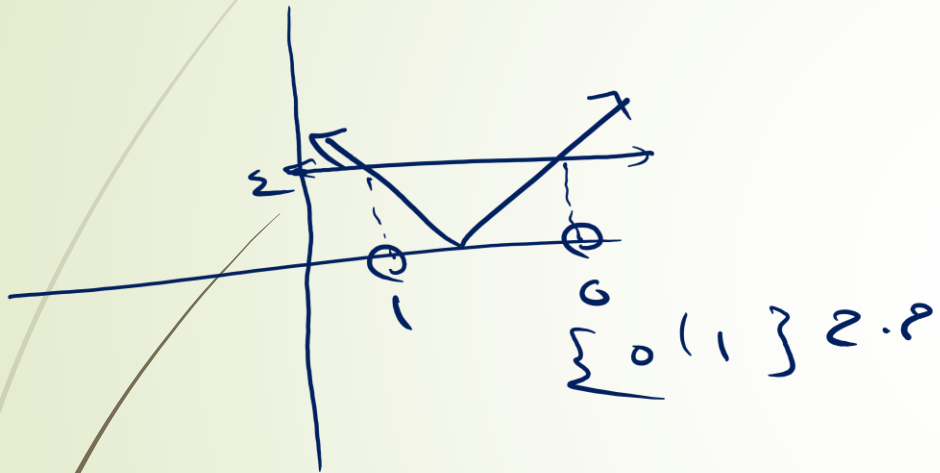
مرحوباً

$$\begin{aligned} s + v &= c - v \\ s &= c - 2v \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s + v &= c - v \\ s + v + v &= c - v + v \\ s + 2v &= c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s + 2v &= c \\ s &= c - 2v \end{aligned}$$

③ البرج البانج



④ الفكرة الثانية

$$|s + v| = |e + v|$$

$$|v + v| = |v + v|$$

$$(v + v) \pm = v + v$$

$$\begin{array}{l|l} (v + v) - = v + v & v + v = v + v \\ v - v = v + v & v - v = v - v \\ v - v = v + v & v - = v \\ \hline \frac{1}{0} = \frac{v}{0} & \end{array}$$

$$\{v - 1 - \} = 2. م$$

الفكرة الأولى مقياس = ثابت

مثال ١ : أوجد جبرياً حل المعادلات التالية :

$$١ \quad |س - ٢| = ٣$$

الحل

$$\therefore س = ٢$$

$$س > ٢$$

$$س - ٢ = ٣$$

$$س = ٣ + ٢$$

$$س = ٥$$

تحقق

$$\therefore \text{ح.م} = \{٥, ١-\}$$

$$\text{بوضع } س = ٢ = ٠$$

$$\text{عندما } س \leq ٢$$

$$س - ٢ = ٣$$

$$س = ٣ + ٢$$

$$س = ٥$$

تحقق

تشيل المقياس وتحط الجنب الثاني \pm
وتعمل معادلتين وتحل

ولكن في البداية يجب تعديل المقياس

$$|س - ٥| = |٥ - س|$$

صفر المقياس : نضع ما داخل المقياس = صفر

ونحصل علي قيمة س و عندها

نعمل إعادة تعريف للمقياس .

إذا كان $|س| = - \text{عدد}$

فإن $\text{ح.م} = \emptyset$

$$\sum_{٥}^{٥} \{٥, ١-\} \neq \emptyset$$

$$3 \quad | 3 - 2s | = 7 \quad | 3 - 2s | = 7$$

الحل

$$7 = | 3 - 2s |$$

$$\text{بوضع } 2s - 3 = 7$$

$$\therefore 2s = 10$$

$$s > \frac{3}{2}$$

$$2s - 3 = 7$$

$$2s = 10$$

$$s = \frac{10}{2} = 5$$

تحقق

$$\therefore \text{ح.م.} = \{ 5, 2 \}$$

$$2 \quad | s - 4 | = 2 \quad | s - 4 | = 2$$

الحل

مرفوض

$$2 = | s - 4 |$$

لأن المقياس = قيمة غير سالبة

$$\therefore \text{ح.م.} = \emptyset$$

$$\text{عندما } s \leq \frac{3}{2}$$

$$2s - 3 = 7$$

$$2s = 10$$

$$s = 5$$

$$s = \frac{10}{2} = 5$$

تحقق

الفكرة الثانية

$$|2s + b| = |js + d|$$

$$|s - 2| = |s + 4| \quad 1$$

الحل

$$s - 2 = \pm (s + 4)$$

$$\therefore s = 2$$

$$s > 2$$

$$s - 2 = s + 4$$

$$s + 4 = s + 2$$

$$2 = 2$$

$$s = \frac{2 - 2}{1} = 0$$

تحقق

$$\therefore \text{م. ح.} = \{0\}$$

$$s - 2 = -(s + 4)$$

$$\text{عندما } s \leq 2$$

$$s - 2 = -s - 4$$

$$2s = -2$$

مرفوض

$$|s - 2| = |s + 4| \quad 4$$

الحل

$$s - 2 = \pm (s + 4)$$

$$|s - 2| = |s + 4|$$

$$\therefore s = 2$$

$$s > 2$$

$$s - 2 = s + 4$$

$$s - 4 = s + 2$$

$$s - 2 = s + 4$$

تحقق

$$\therefore \text{م. ح.} = \{2, -2\}$$

$$s - 2 = 0$$

$$\text{عندما } s \leq 2$$

$$s - 2 = -s - 4$$

$$s + 4 = s - 2$$

$$s = 2$$

تحقق

$$|s| + s = 0 \quad 3$$

$$|s + 2| + s - 2 = 0 \quad 2$$

الحل

$$|s + 2| = 2 - s$$

$$s + 2 = \pm (2 - s)$$

$|s| = -s$
ارجع للمحوظة رقم ١٢

$$s \in]-\infty, 0]$$

$$s \in]-\infty, 0] = \text{ح.م.}$$

$$s > 2$$

$$s + 2 = 2 - s$$

$$s = 2$$

مرفوض

$$\text{ح.م.} = \{0\}$$

$$s \leq -2$$

$$s + 2 = 2 - s$$

$$s = 0$$

$$s = 0$$

يحق

$$10 = |3s - 9| - |3 - s| \quad 5$$

$$10 = |3s - 9| - |3 - s|$$

$$10 = |3s - 3| - |3 - s|$$

$$5 = \frac{10}{2} \quad 10 = |3s - 3|$$

$$5 = |3 - s| \quad \therefore 5 \pm = 3 - s$$

$$5 - = 3 - s$$

$$2 - = s$$

تحقق

$$5 = 3 - s$$

$$8 = s$$

تحقق

$$\{8, 2-\} = \text{ح.م.} \therefore$$

$$10 - 3s = |2 + s| \quad 4$$

$$(10 - 3s) \pm = 2 + s$$

$$2 > s$$

$$\text{عندما } s \leq 2$$

$$10 + 3s = 2 + s$$

$$2 - 10 = s + 3s$$

$$8 = 4s$$

$$2 = \frac{8}{4} = s$$

لا تحقق

$$\{2\} = \text{ح.م.} \therefore$$

$$10 - 3s = 2 + s$$

$$2 - 10 = s + 3s$$

$$2 - = s + 12$$

$$6 = \frac{12 -}{2 -} = s$$

تحقق

الفكرة الثالثة مقياس = مقياس

يمكن الحل مثل كل الأنواع السابقة بدون الإلتزام بشرط صفر المقياس أو الحل بتربيع الطرفين .

$$| 3 + 2s | = | 7 + 3s | \quad 1$$

الحل

$$(3 + 2s) \pm = (7 + 3s)$$

$$3 - 2s = 7 + 3s$$

$$3 + 2s = 7 + 3s$$

$$7 - 3 = 2s + 3s$$

$$7 - 3 = 2s - 3s$$

$$4 = 5s$$

$$4 = -s$$

$$s = \frac{4}{5}$$

يحقق

يحقق

$$| 2 - | 1 - s | | = 0$$

الحل

$$| 2 - | 1 - s | = 0$$

$$| 2 - | 1 - s | = 0$$

$$2 - | 1 - s | = 0$$

$$2 = | 1 - s |$$

$$2 = | 1 - s |$$

$$2 = | 1 - s |$$

يحقق

$$\therefore \text{م.ح} = \{ 3, 1 \}$$

$$2 - | 1 - s | = 0$$

$$2 = | 1 - s |$$

$$2 = | 1 - s |$$

$$2 = | 1 - s |$$

يحقق

الحل البياني

٢

بترسم كل طرف كأنه دالة منفصلة وتجييب نقط
التقاطع يبقي ده الحل .

مثال ١ : حل بيانياً :

١ |س| - ٢ = ٠

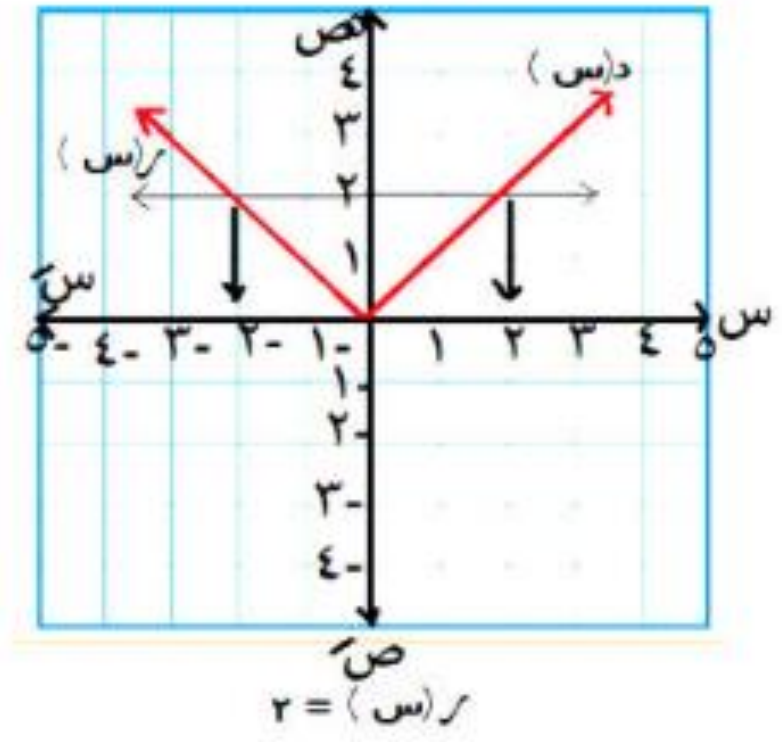
الحل

|س| = ٢
د(س) = |س|

من الرسم

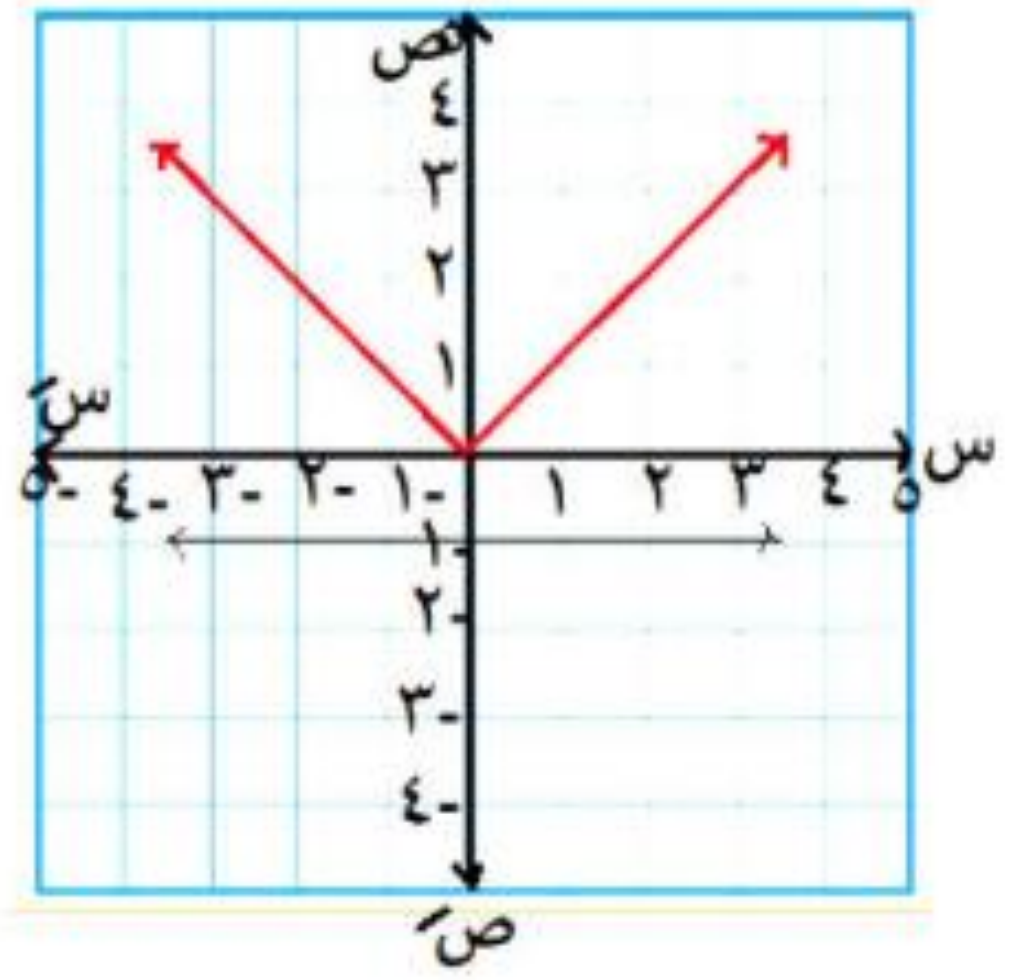
∴ ح.م =

{ -٢, ٢ }



٢ | $|s| + 1 = 0$

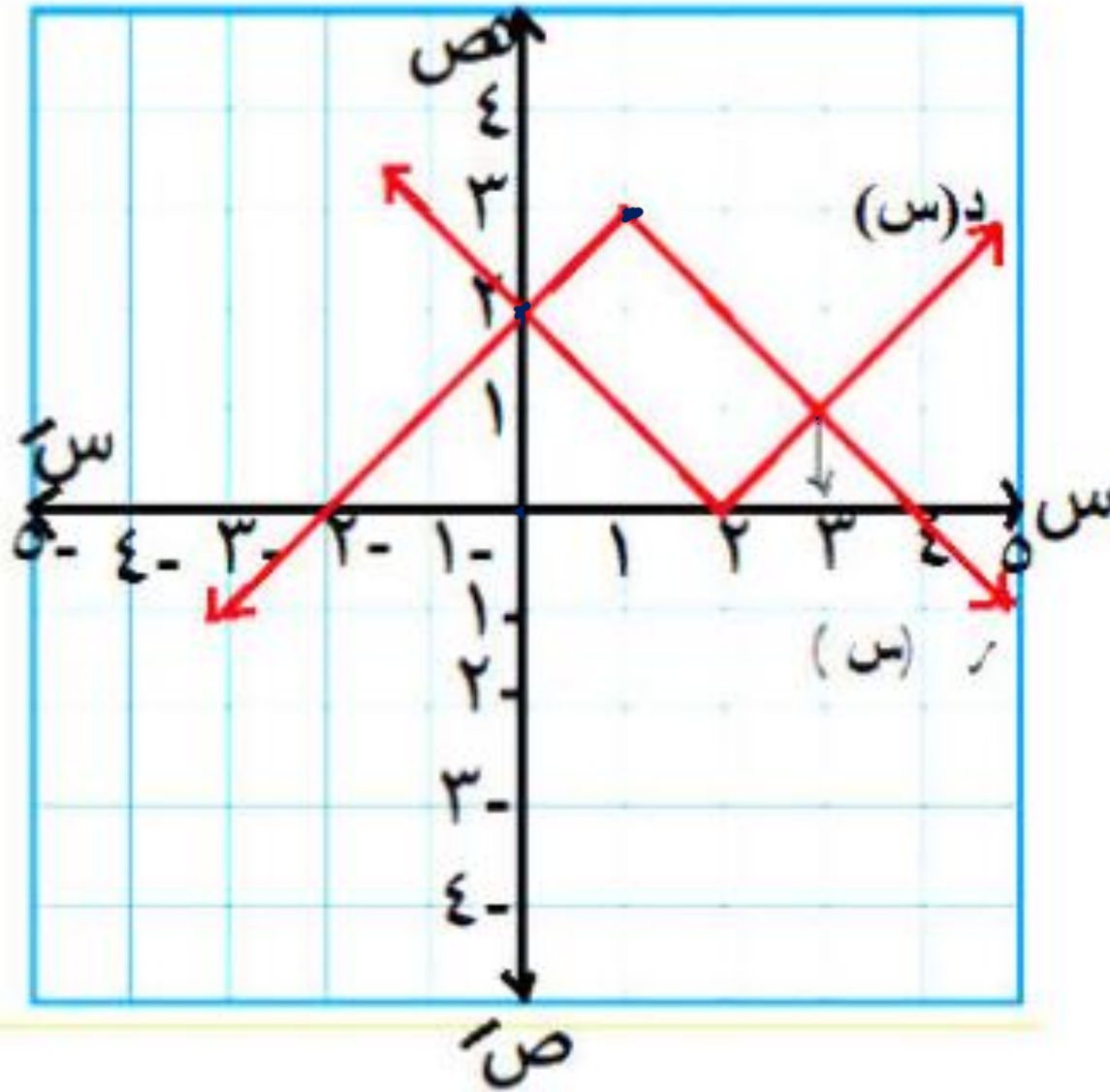
الحل



$|s| = 1$
 $|s| = (s)$

من الرسم
∅ = م.ح

$$3 = |1 - s| + |2 - s|$$



$$(٠١٢) \quad |2 - s| = \text{د (س)}$$

$$= \text{ر (س)}$$

$$(١٣١) \quad |1 - s| = 3$$

من الرسم

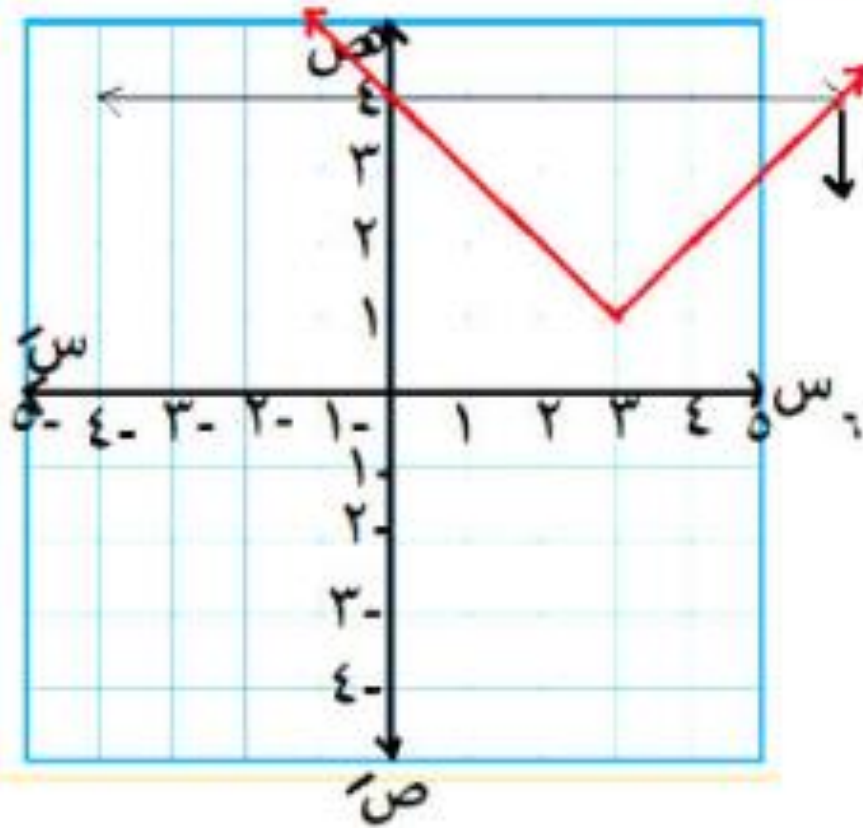
$$\underline{\{3, 0\}}$$

٤ ارسم منحنى الدالة $d(s) = |s-3| + 1$

ومن الرسم ابحث الأضداد ثم أوجد مجموعة

حل المعادلة $d(s) = 4$

الحل



الأضداد :

تناقصية في

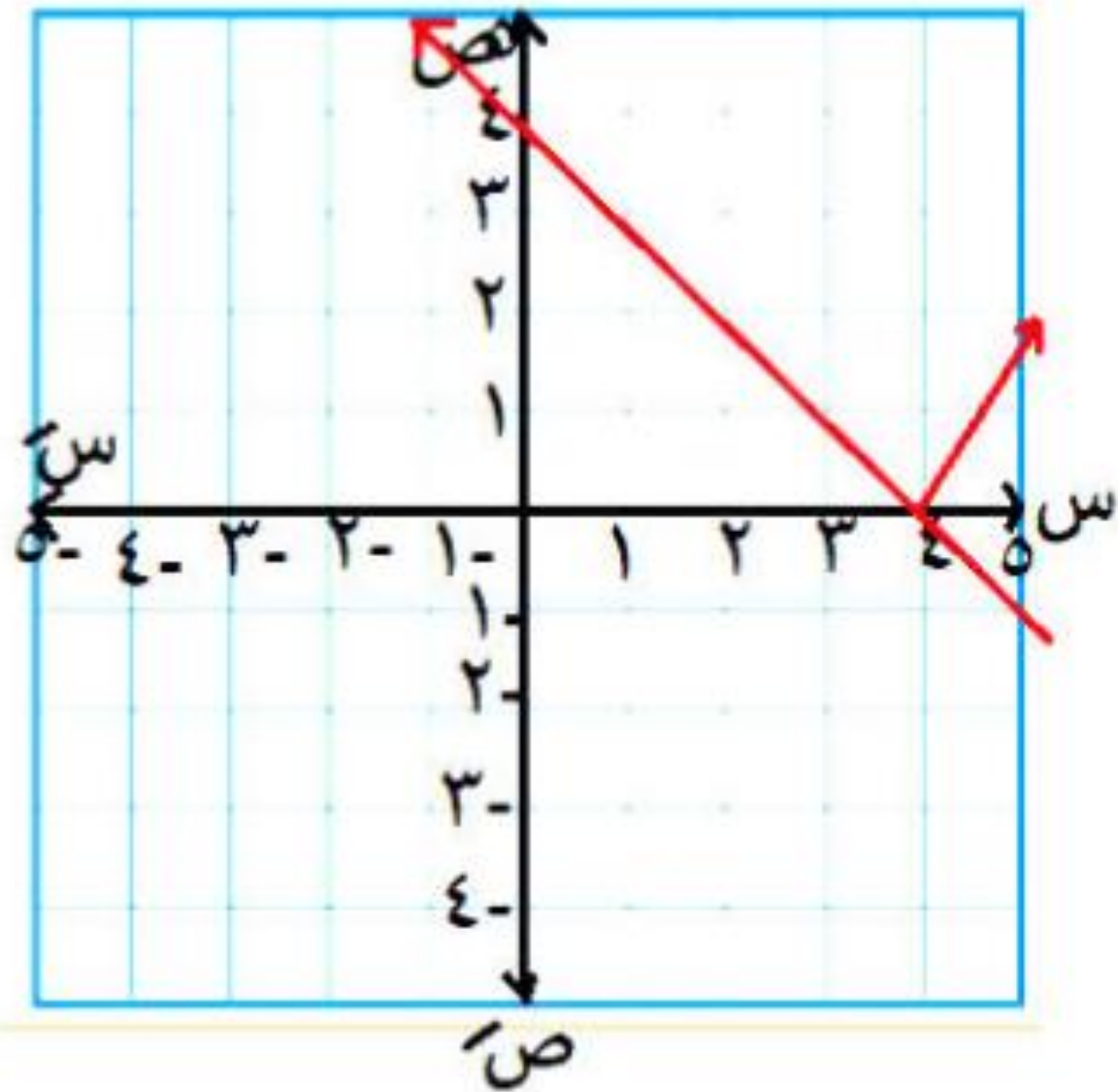
$]-\infty, 3[$

تزايدية في

$]3, \infty[$

$\therefore \text{م.ح} = \{0, 6\}$

$$5 \quad | 5 - 4 = 1 | \text{سر}$$



$$د(س) = | 5 - 4 |$$

$$ر(س) = 4 - 5$$

من الرسم

ن.م.ح =

$$[-\infty , 4]$$

أوجد جبرياً في ح مجموعة حل كل من المعادلات الآتية :



$$x - \sqrt{x} = 15 - \sqrt{x}$$

$$(x - \sqrt{x}) + = 15 - \sqrt{x}$$

عز الصيغتين

$$x - \sqrt{x} = 15 - \sqrt{x}$$

$$x = 15$$

$$x + \sqrt{x} = 15 - \sqrt{x}$$

$$x + 3 = \sqrt{x} + 15$$

$$x + 3 = 15 + \sqrt{x}$$

$$x = 15 + \sqrt{x} - 3$$

$$x = 12 + \sqrt{x}$$

$$x - \sqrt{x} = 12$$

$$x = 12 + \sqrt{x}$$

لا تصح

ج. م = $\left\{ \frac{25}{4} \right\}$

$$1) \quad x = 20 - |x|$$

$$2) \quad 2 = |2 + x| - 2$$

$$3) \quad 4 - x = |2 - x|$$

$$4) \quad \left\{ \frac{2}{7} \right\}$$

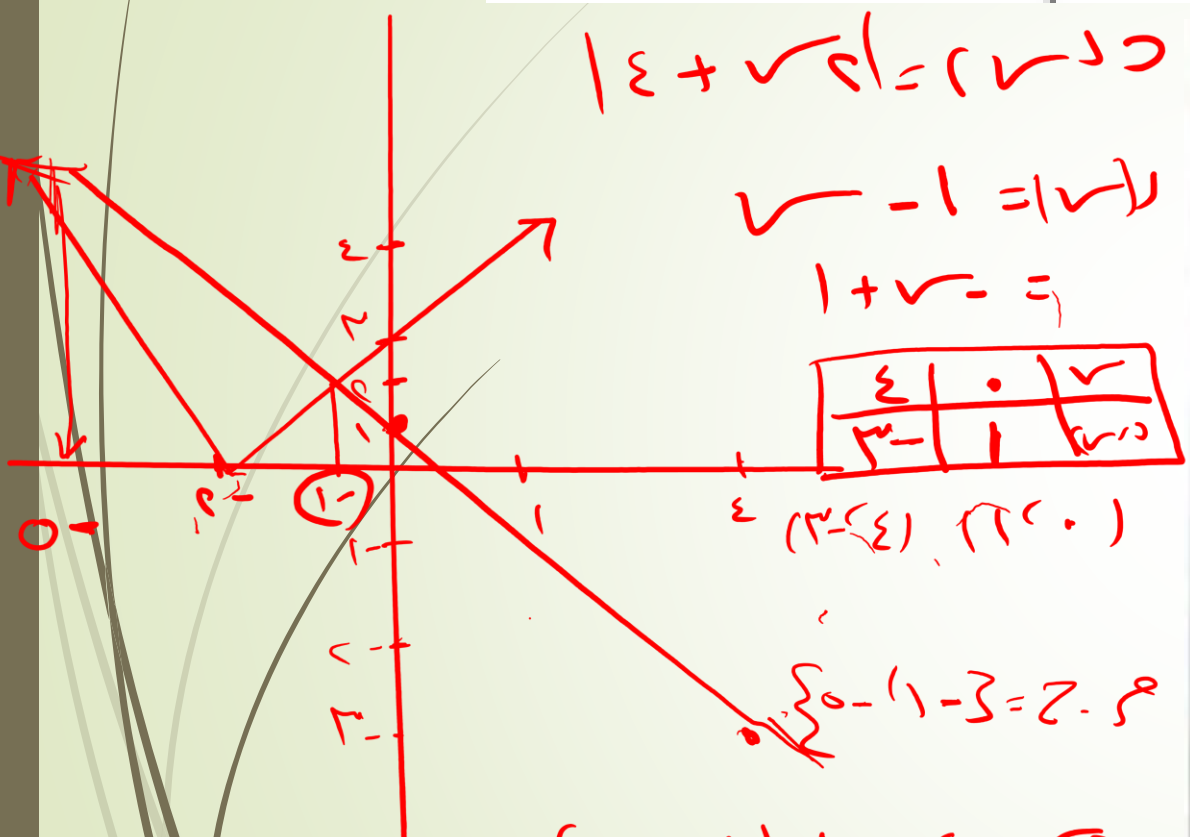
$$5) \quad \{0\}$$

$$6) \quad 2 = 2 - x + |2 + x|$$

$$7) \quad |2 - x| = |5 + x|$$

(-5)

أوجد بيانًا في مع مجموعة حل كل من المعادلات الآتية ، وحقق الناتج جبريًا :



$$x + y = 4$$

$$x + y = 1$$

$$x + y = 1$$

4	0	x
3	1	دور

(0, 4) (4, 0)

$$x + y = 1$$

$$(x - 1) \pm = 4 + x$$

$$x + y = 4$$

$$x + y = 4$$

$$x - y = 1$$

$$x - y = 1$$

$$x = 1$$

$$x = 1$$

$$1. \quad 0 = 4 - |x - 4| \Rightarrow \{4 - 4, 4\}$$

$$2. \quad 0 = |x + 2| - 2 \Rightarrow \{4 - 4, 0\}$$

$$3. \quad 0 = |x + 2| + x \Rightarrow \{1\}$$

$$4. \quad 0 = |2x + 4| - x - 1 \Rightarrow \{0 - 4, 1 - 1\}$$

$$5. \quad |2 - x| = |x + 2| \Rightarrow \{1/2\}$$

$$6. \quad |1 + x - 2| = |x - 2| \Rightarrow \{2/3, 4 - 4\}$$

$$7. \quad 2 + x = |x + 2| \Rightarrow \{0, 2\}$$

$$8. \quad |x - 2| - 4 = |x + 1| \Rightarrow \{2 + 1\}$$

١ مجموعة حل المعادلة : $|x - 2| = 3$ هي

- (1) $\{2, 3\}$ (ب) $\{-1, 0\}$ (ج) $[-1, 0]$ (د) $\{0, -1\}$

٢ مجموعة حل المعادلة $|5 - x| = 1 + 4 = 5$ هي \mathcal{E} هي

- (1) $\{\frac{4}{5}\}$ (ب) $\{\frac{4}{5}, \frac{6}{5}\}$ (ج) \emptyset (د) $\{\frac{7}{5}\}$

٣ مجموعة حل المعادلة : $|x - 2| = |2 - x|$ هي \mathcal{E} هي

- (1) $\{2\}$ (ب) $\{2, -2\}$ (ج) \mathcal{E} (د) \emptyset

٤ مجموعة حل المعادلة : $|2 - x| = |4 - x|$ هي \mathcal{E} هي

- (1) $\{0, 1\}$ (ب) $\{0, -1\}$ (ج) $\{-1, 0\}$ (د) $\{-1, -0\}$

٥ مجموعة حل المعادلة : $|2 - x| = |1 - x|$ هي \mathcal{E} هي

- (1) $\{2\}$ (ب) $\{\frac{1}{2}, 2\}$ (ج) $\{\frac{1}{2}, 2\}$ (د) \emptyset

٦ مجموعة حل المعادلة : $|x - 2| = |x - 2|$ هي \mathcal{E} هي

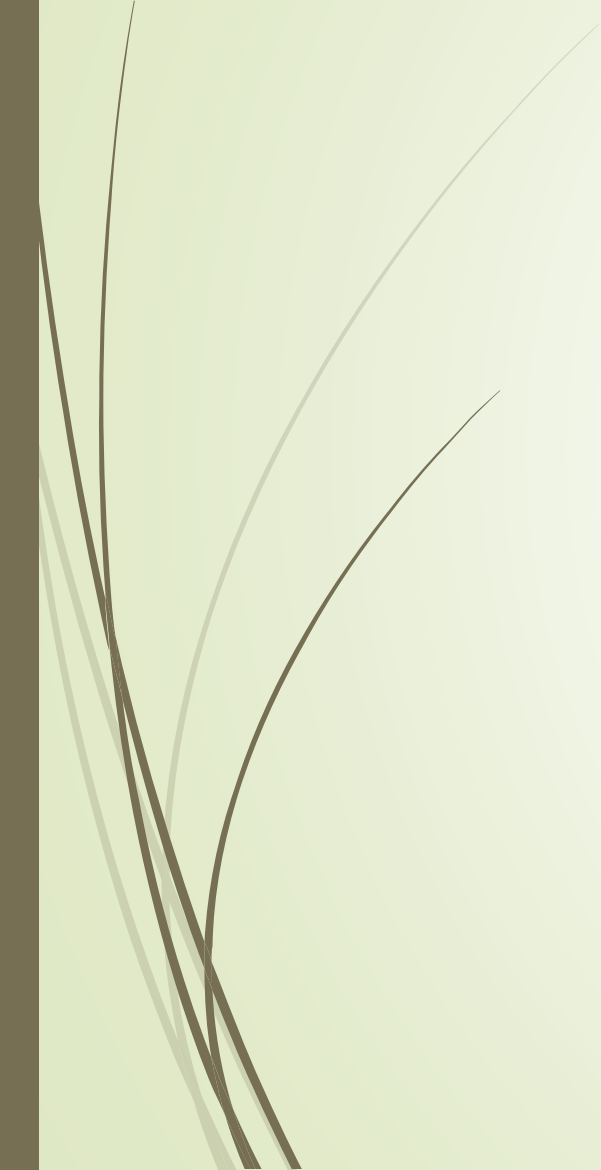
- (1) \emptyset (ب) $\{2\}$ (ج) $]-\infty, 2]$ (د) \mathcal{E}

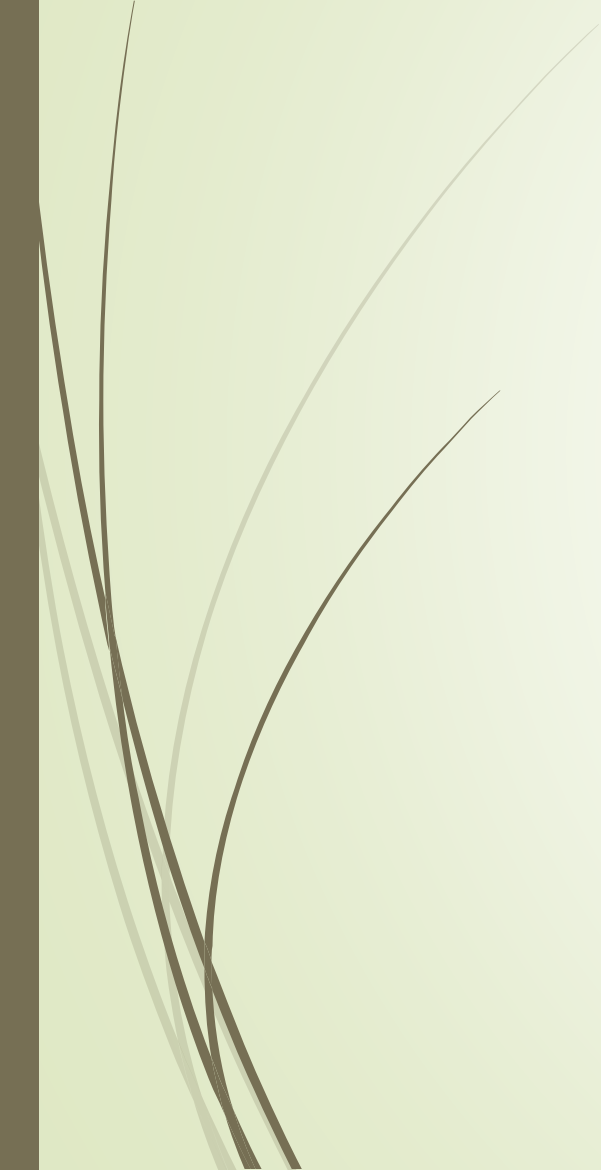
٧ مجموعة حل المعادلة : $\frac{1}{x} = \frac{1}{|x - 2|}$ هي حيث $x \neq 2$

- (1) $\{0\}$ (ب) $\{1\}$ (ج) $\{0, 1\}$ (د) \emptyset

٨ مجموعة حل المعادلة : $|x - 2| = x + 2$ هي

- (1) $\{2\}$ (ب) $]-2, \infty[$ (ج) $]-2, \infty[$ (د) \emptyset





الجزء الثاني من الدرس
متباينات القيمة المطلقة

شوية ملاحظات هامة

١ $|s| \geq p$

$p \geq s \geq -p$

$|p, -p| = \text{ح.م.}$

٢ $|s| \leq p$ (منفصل)

إما $s \leq p$ أو $s \geq -p$

$|p, -p| = \text{ح.م.}$

٣ $|s| \geq 0$

$\therefore |s| = 0$

لأنه مینفعلش يكون أصغر من صفر

٤ $|s| > 0$

$\therefore \text{ح.م.} = \emptyset$

٥ $|s| > 1$

$\therefore \text{ح.م.} = \emptyset$

٦ $|s| < 1$

عام ص ١٥

$\therefore \text{ح.م.} = \text{كل الأعداد الحقيقية}$

٧ $|s| < 0$

$\therefore \text{ح.م.} = \emptyset$

$|s| < 0$
 $\therefore \text{ح.م.} = \emptyset$

* لكل $a \in \mathbb{R}^+$

١ إذا كان : $a > x$ فإن : $a > x > a - \epsilon$ أي أن $\exists x \in]a - \epsilon, a[$

٢ إذا كان : $a \geq x$ فإن : $a \geq x \geq a - \epsilon$ أي أن $\exists x \in]a - \epsilon, a]$

٣ إذا كان : $a < x$ فإن : $a < x$ أو $x > a + \epsilon$ *نصفين* أي أن $\exists x \in]a, a + \epsilon[\cup]a + \epsilon, \infty[$

٤ إذا كان : $a \leq x$ فإن : $a \leq x$ أو $x \geq a + \epsilon$ أي أن $\exists x \in]a, a + \epsilon] \cup]a + \epsilon, \infty[$

* لكل $a \in \mathbb{R}^-$

١ مجموعة حل المتباينة : $a > x$ ، $a \in \mathbb{R}^-$ ، $a \geq x$ في \mathbb{R} تساوي \emptyset

٢ مجموعة حل المتباينة : $a < x$ ، $a \in \mathbb{R}^-$ ، $a \leq x$ في \mathbb{R} تساوي \mathbb{R}



١ $|x| - 2 \geq 0$

$|x| \geq 2$

$x \geq 2$ $x \leq -2$

م.ح = $[-2, 2]$

٢ $\sqrt{x^2 - 1} \geq 1$

$\sqrt{(x-1)}$

$|x-1| \geq 1$

بإضافة ١ $1 \geq x - 1 \geq 1$

$1 + 1 \geq 1 + 1 - x \geq 1 + 1$

$x \geq 0$

م.ح = $[2, 0]$

٣ $|x^2 - 5| + |5 - x^2| > 14$

$|x^2 - 5| + |5 - x^2| > 14$

$2 \div 14 > |x^2 - 5| \cdot 2$

$7 > |x^2 - 5|$

بإضافة ٥ $7 > x^2 - 5 > 7 - 5$

$5 + 7 > x^2 > 5 + 7 - 5$

$2 > x^2 > 12 \div 2$

$1 > x > 1$

م.ح = $[-1, 1]$

$$0 > |2s - 3| \quad 6$$

$$\emptyset = \text{م.ح}$$

$$2 > |1 - s| \quad 4$$

$$\emptyset = \text{م.ح}$$

لأن المقياس عدد غير سالب

$$0 \geq |2 + s| \quad 5$$

المقياس لا يمكن أن يكون أصغر من صفر
لكن ممكن = صفر

$$0 = |2 + s| \quad \therefore$$

$$2 + s = 0 \quad s = -2$$

$$\therefore \text{م.ح} = \{-2\}$$

الفكرة الثانية | س | < عدد

دي تنفصل لجزئين

$$1 \quad | \text{س} | < 2$$

$$3 \quad | \text{س} - 2 - 3 | < 5$$

$$\text{إما س} < 2 \quad \text{أو} \quad \text{س} > 2$$

$$\text{م.ح} = \text{ح} - [2, 2)$$

لاحظ في الفرق بتفعل المفتوح وتفتح المغلق

$$2 \quad | \text{س} + 2 | < 3$$

$$\text{إما س} + 2 < 3 \quad \text{أو} \quad \text{س} + 2 > 3$$

$$\text{س} < 3 - 2 \quad \text{س} > 3 - 2$$

$$\text{س} < 1 \quad \text{س} > 5$$

$$\text{م.ح} = \text{ح} - [1, 5)$$

$$| \text{س} - 2 - 3 | < 5$$

إما $\text{س} - 2 - 3 < 5$ أو $\text{س} - 2 - 3 > 5$

$$\text{س} - 2 - 3 < 5 \quad \text{س} - 2 - 3 > 5$$

$$\text{س} < 8 \quad \text{س} > 2$$

$$\text{س} < 4 \quad \text{س} > 1$$

$$\text{م.ح} = \text{ح} - [1, 4)$$

$$5 \leq \frac{1}{|1-3s|} \quad 6$$

هتقلب الطرفين وتغير إتجاه المتباينة

$$\frac{1}{5} \geq |1-3s|$$

بإضافة 1 +

$$\frac{1}{5} \geq 1-3s \geq \frac{1}{5}$$

3 ÷

$$\frac{1}{5} \geq 3s \geq \frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{15} \geq s \geq \frac{4}{15}$$

متساويات تصغر المقام

$$\frac{1}{3} = s = 1 = 3s = 1 - s = \frac{1}{3}$$

$$\text{م.ح} = \left[\frac{1}{15}, \frac{4}{15} \right] - \left\{ \frac{1}{3} \right\}$$

$$6 \leq |4+3s| + \sqrt{(2+s)} \quad 4$$

$$6 \leq |2+s| + |2+s|$$

$$6 \leq |2+s| + 4$$

$$2 \leq |2+s|$$

$$2 \leq 2+s \quad \text{أو} \quad 2 \leq 2-s$$

$$s \geq 0$$

$$s \leq 0$$

$$s \geq -4$$

$$s \leq 0$$

$$\text{م.ح} = [-4, 0]$$

$$5 \leq |s| \quad 5$$

$$\text{م.ح} = \text{م.ح} = \text{ح} = \text{ح}$$

لأن المقياس دائماً ≥ 0

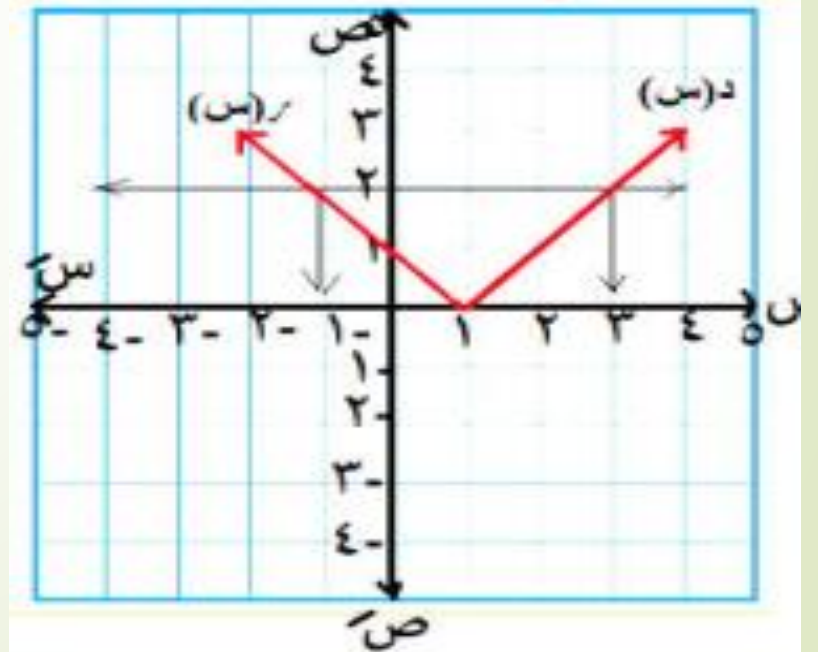
يعني أكبر من أي عدد سالب

الفكرة الثالثة الحل البياني

$$x > 1 \quad | \quad x - 1$$

$$d(x) = |x - 1| \quad \text{ب.م.ح.} =$$

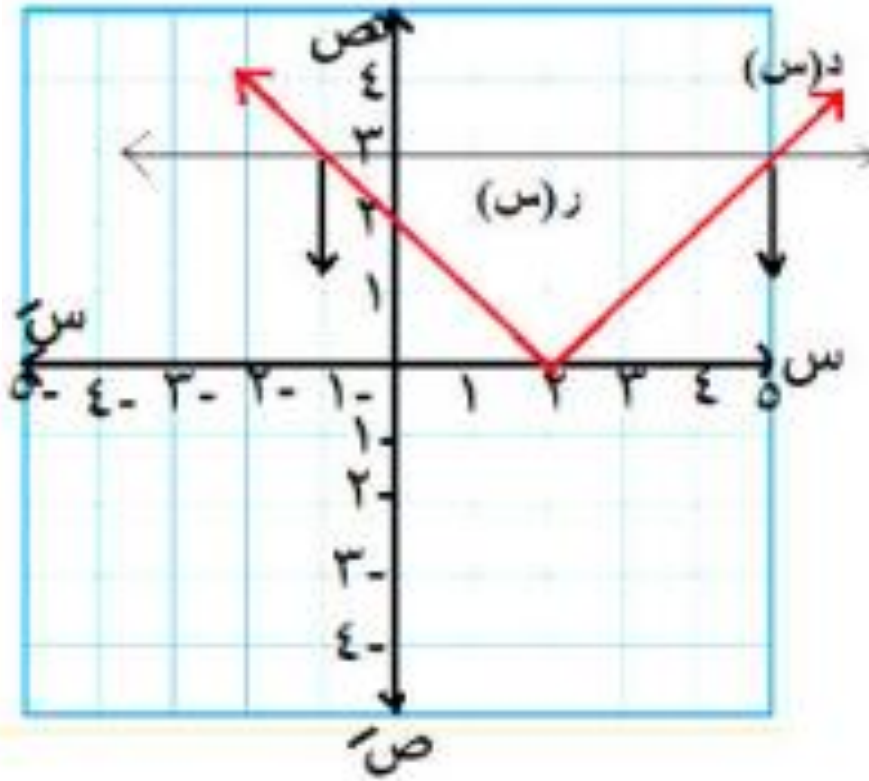
$$r(x) = 1$$



$$x > 2 \quad | \quad x - 2$$

$$d(x) = |x - 2| \quad \text{ب.م.ح.} =$$

$$r(x) = 2$$



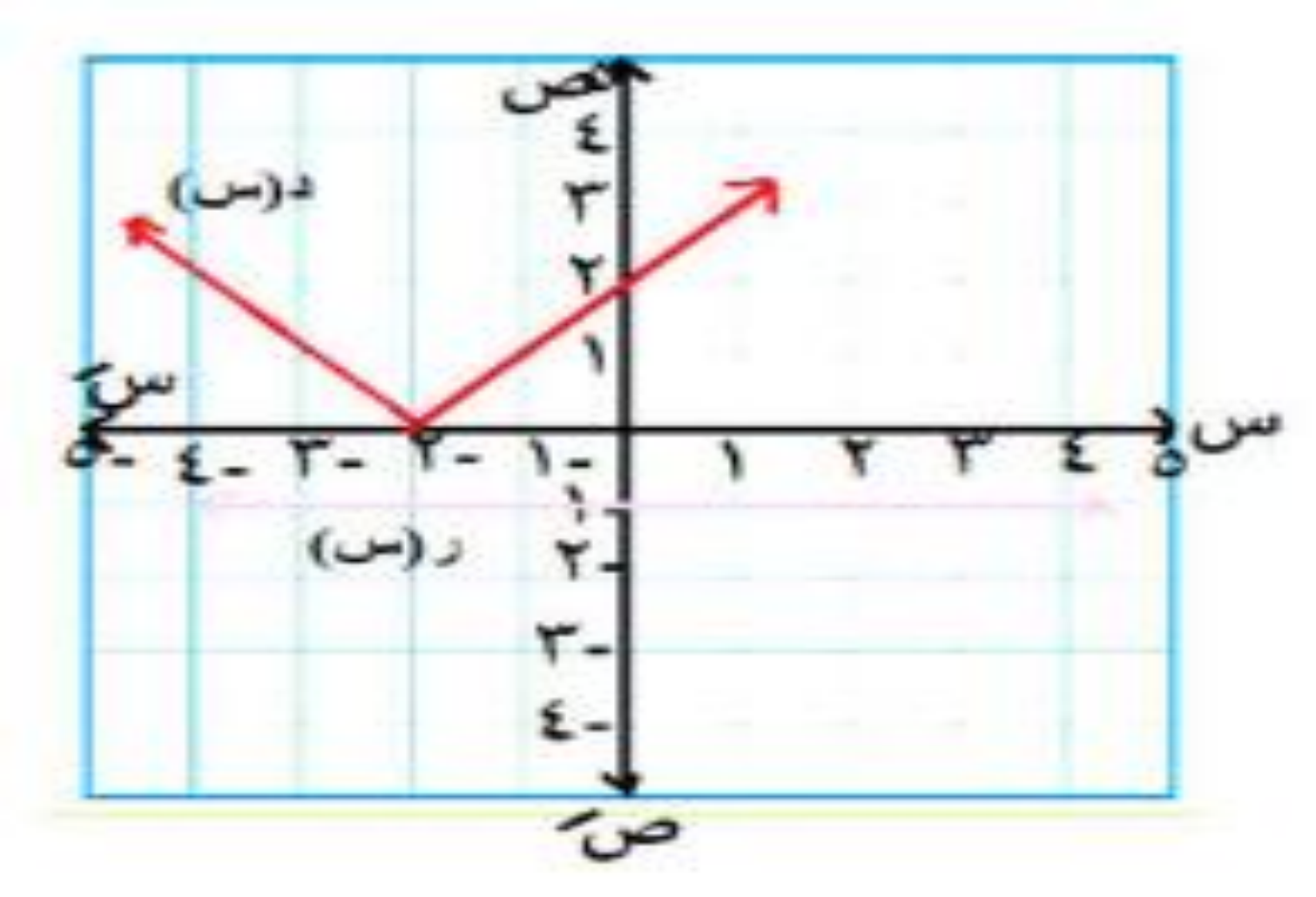
$$\text{ب.م.ح.} =$$

$$[1, 5]$$

۳ | $s + 2 < 1$

د (س) = $s + 2$
ر (س) = 1

∴ م. ح = ح



الفكرة الرابعة تعيين المجال

$$\frac{1+s}{|5+s|} = (s) \quad 1$$

بوضع $|5+s| = 0$

$$s = -5$$

المجال : ح - $\{ -5 \}$

$$s = -5$$

$$\frac{2s}{3-|s|} = (s) \quad 2$$

بوضع $|s| - 3 = 0$

$$s = \pm 3$$

المجال : ح - $\{ \pm 3 \}$

$$\frac{1}{2-|s|} = (s) \quad 3$$

بوضع $|s| - 2 = 0$

$$|s| = 2$$

إما $s = 2$ أو $s = -2$

المجال : ح - $\{ -2, 2 \}$

$$\frac{1}{|s-5|} = (s) \quad 4$$

بوضع $|s| - 5 = 0$

$$[-5, -1) \cup [1, 5]$$

$$|s| \leq 5$$

$$|s| > 5$$

$$-5 > s > 5$$

المجال : $[-5, 5]$

آخر فكرة

ابحث نوع الدوال من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

$$١ \quad د (س) = س^٢ |س| - ١$$

لكل س ، (- س) \exists للمجال

$$د (- س) = (- س)^٢ | - س | - ١$$

$$= س^٢ |س| - ١ = د (س)$$

∴ الدالة زوجية

$$٢ \quad د (س) = \frac{جئاس}{٣ - |س|}$$

$$د (- س) = \frac{جئ(- س)}{٣ - | - س |}$$

$$∴ الدالة زوجية \quad د (س) = \frac{جئاس}{٣ - |س|} =$$

$$٣ \quad د (س) = \frac{|س + ٢| - |س - ٢|}{|س + ٢| + |س - ٢|}$$

$$د (- س) = \frac{| - س - ٢| - | - س + ٢|}{| - س - ٢| + | - س + ٢|}$$

$$∴ الدالة فردية = \frac{(|س + ٢| - |س - ٢|)}{|س + ٢| + |س - ٢|}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ - من } \leq \\ \bullet \text{ - من } > \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ (س -)} \\ | \text{ س - } | \end{array} = \text{د (س -)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ من } \geq \\ \bullet \text{ من } < \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ س} \\ | \text{ س } | \end{array} = \text{د (س -)}$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ من } \leq \\ \bullet \text{ من } > \end{array} \right\} \begin{array}{l} | \text{ س } | \\ 2 \text{ س} \end{array} =$$

د (س -) \neq د (س) \neq د - د (س)
 ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

$$\left. \begin{array}{l} \bullet \text{ من } \leq \\ \bullet \text{ من } > \end{array} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ س} \\ | \text{ س } | \end{array} = \text{د (س)}$$

أوجد جبريًا مجموعة الحل في \mathbb{R} لكل من المعادلات الآتية :

$$10 = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + x \quad [2]$$

$$10 = |x - 3| - |9 - x| \quad [1]$$

$$x = 28 - |x| \quad [3]$$

$$10 = |x - 3| - |9 - x| \quad [1]$$

(لاحظ أن: $|x - 3| = |3 - x|$)

$$\therefore 10 = |3 - x| - |2 - x|$$

$$\therefore 10 = |3 - x| \quad \therefore 0 = |3 - x| \quad \therefore 0 = 3 - x$$

$$\therefore 3 - x = 0 \text{ ومنها } x = 3$$

$$x = 3 \text{ ومنها } 0 = 3 - x$$

\therefore مجموعة الحل = $\{3, 8\}$

$$[3] \quad \left. \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} = |x|$$

$$\therefore \left. \begin{array}{l} x \leq 0 \\ x > 0 \end{array} \right\} = \left. \begin{array}{l} x^2 - 2x - 28 \\ x^2 + 2x - 28 \end{array} \right\} = 28 - |x|$$

$$x \leq 0 \text{ ، عندما } x = 28 - x^2$$

$$\therefore (x - 7)(x + 4) = 0 \text{ ومنها } x = 7 \text{ ومنها } x = -4$$

$$x > 0 \text{ ، عندما } x = 28 + x^2$$

$$\therefore (x + 7)(x - 4) = 0 \text{ ومنها } x = -7 \text{ ومنها } x = 4$$

$$\therefore$$

$$\therefore \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 10 - x$$

$$[2] \quad \sqrt{x^2 - 4x + 4} = 10 - x$$

$$\therefore |x - 2| = 10 - x$$

$$\left. \begin{array}{l} x \leq 2 \\ x > 2 \end{array} \right\} = |x - 2|$$

$$\text{عندما } x \leq 2 : x - 2 = 10 - x \text{ ومنها } x = 6 \in]0, 2]$$

$$\text{عندما } x > 2 : 2 - x = 10 - x$$

\therefore مجموعة الحل = $\{6\}$

$\therefore x = 2$ (وهذا مستحيل)

١١) مجموعة حل المعادلة : $x^2 = 2 - |x|$ هي

- (1) $\{-1, 1\}$ (ب) $\{-2, 2\}$ (ج) $\{-1, 2\}$ (د) $\{-1, 2\}$

١٢) إذا كانت مجموعة حل المعادلة : $|x - 4| = b$ هي $\{0, 9\}$ فإن : (أ) $(4, 9) =$

- (1) $(-7, 7)$ (ب) $(2, 7)$ (ج) $(2, 7)$ (د) $(-7, 7)$

١٣) إذا كانت : د (س) $= \sqrt{x^2 + |x|}$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) $= 2$ في ح

- (1) $\{-2, 2\}$ (ب) $\{-1, 1\}$ (ج) $\{0, 2\}$ (د) $\{-1, 0\}$

١٤) إذا كان : د (س) $= |x - 2| + 4$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) $= 2$ هي

- (1) $\{1, 3\}$ (ب) ح (ج) \emptyset (د) $\{-1, 2\}$

١٥) إذا كان : د (س) $= |x - 2| + 4$ فإن مجموعة حل المعادلة : د (س) $= 6$ هي

- (1) $\{0, 4\}$ (ب) $\{-2, 2\}$ (ج) $\{2, 4\}$ (د) $\{-2, 4\}$

١٦) مجموعة حل المعادلة : $\sqrt{x^2 - 12x + 9} = 5$ هي

- (1) $\{4\}$ (ب) $\{-1\}$ (ج) $\{4, -1\}$ (د) ح

١٧) أى مما يأتى لا ينتمى لمجموعة حل المعادلة $|x + 2| + |x - 1| = 3$

- (1) -2 (ب) صفر (ج) -3 (د) 1

١٨) مجال الدالة د : د (س) $= \frac{2}{x - |x|}$ هو

- (1) ح $\{-2\}$ (ب) ح $\{-2\}$ (ج) ح (د) ح $\{-2, 2\}$

١٩) مجال الدالة د : د (س) $= \frac{1}{x + |x|}$ هو

- (1) ح (ب) $\{-2, 2\}$ (ج) ح $\{-2, 2\}$ (د) ح $\{2\}$

٢٠) إذا كان مجال الدالة د : د (س) $= \frac{x}{x + |x|}$ هو ح $\{-2, 2\}$ فإن : ٢ =

- (1) 2 (ب) -2 (ج) $2 \pm$ (د) صفر

٢١) الدالة د : د (س) $= \frac{x|x|}{|x|}$ من حيث نوعها تكون

- (أ) فردية. (ب) زوجية.

- (ج) ليست فردية وليست زوجية. (د) أحادية.

أوجد في ح مجموعة حل كل من المتباينات الآتية جبرياً :

$$]8, 2[- \cup]-\infty, 10[$$

$$|2 - x| \leq 5 \quad (2)$$

$$]8, 2[-$$

$$|2 - x| \geq 5 \quad (1)$$

$$]10, 4[-$$

$$|x - 2| > 7 \quad (4)$$

$$]1, 4[- \cup]-\infty, 10[$$

$$|2 + x + 5| < 2 \quad (3)$$

$$\emptyset$$

$$|2 + x - 3| + 5 > 4 \quad (6)$$

$$]7, 1[-$$

$$\left| \frac{2 - x}{4} \right| \geq 1 \quad (5)$$

$$\left\{ \frac{2}{2} \right\} -]\frac{7}{4}, \frac{5}{4}[\quad 2 < \frac{1}{|2 - x - 2|} \quad (8)$$

$$\{0\} -]\frac{1}{15}, \frac{1}{15}[\quad 0 \leq \frac{1}{|2 - x|} \quad (7)$$

$$]0, 2[- \cup]-\infty, 10[\quad 4 \leq \sqrt{1 + x - 2 - x^2} \quad (10)$$

$$]7, \frac{1}{2}[- \cup]-\infty, 10[\quad 7 < 2 + |2 - x| \quad (9)$$

أوجد مجال كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية

$$① \text{ د (س) } = \frac{2}{1 - |س|}$$

$$② \text{ د (س) } = \frac{س^2}{5 - |س - 2|}$$

$$⑤ \text{ د (س) } = \sqrt{2 - |س|}$$

١٤ ابحث نوع كل من الدوال المعرفة بالقواعد الآتية من حيث كونها زوجية أو فردية أو غير ذلك :

$$① \text{ د (س) } = |س|$$

$$② \text{ د (س) } = \frac{|س + 1| + |س - 1|}{|س + 1| - |س - 1|}$$

$$⑤ \text{ د (س) } = 2 - |س| + 2|س|$$

النوع الثاني المعادلات علي الشكل

$$5 = 1 - 3x + 1 + 3x \quad (1)$$

$$26 = 1 - 5x + 1 + 5x \quad (2)$$

وبعدين نقول

بوضع $3x$ مثلاً $= 3x$ ويبقى المعادلة الأولى:

$$5 = 1 - 2 \times 3x + 2 \times 3x$$

بوضع $5x = 3x$

$$2 \times 5 = \frac{3x}{2} + 3x$$

$$10 = 3x + 3x$$

$$2 = 3x \quad 10 = 3x$$

$$\{1\} = \text{م. ح.}$$

$$1 = 3x$$

$$2 = 3x$$

طريقة أخرى لحل هذا النوع من المعادلات الأسية

فاكر لما كنا بنقول في حالة الضرب نجمع الأسس
دلوقتي هنقول الأسس المجموعة جاية من ضرب
والمطروحة جاية من قسمة

$$\text{فمثلاً: } 1 \times 3x = 1 + 3x$$

$$2 \times 5x = 2 + 5x$$

$$\text{وهكذا } \frac{3x}{2x} = 2 - 3x$$

٢ حل المعادلة :

$$162 = 2 + 3 - 3 + 3$$

$$162 = 2 \times 3 - 3 \times 3$$

بوضع $3 = ص$

$$162 = 2ص - 3ص$$

$$162 = 18ص$$

$$9 = \frac{162}{18} = ص$$

$$2 \times 3 = 3 \therefore 9 = 3$$

$$\{2\} = ح. م \quad 2 = 3 \therefore$$

$$x^2 + 25 = 26x$$

بوضع $x = y$ ويكون $x^2 = y^2$

$$y^2 + 25 = 26y$$

$$y^2 - 26y + 25 = 0$$

$$(y - 1)(y - 25) = 0$$

$$y - 1 = 0 \quad y - 25 = 0$$

$$y = 1 \quad y = 25$$

$$x = 1 \quad x = 25$$

$$x = 1 \quad x = 25$$

$$x = 1, 25$$

$$٢س = \frac{٥٢}{٢س} + ٢س \quad \text{بوضع } ٢س = ص$$

$$ص \times ص \quad ١٢ = \frac{٣٢}{ص} + ص$$

$$ص ١٢ = ٣٢ + ٢ص$$

$$٠ = ٣٢ + ص ١٢ - ٢ص$$

$$٠ = (ص - ٤) (ص - ٨)$$

$$ص = ٤ \quad ص = ٨$$

$$٢س = ٤ \quad ٢س = ٨$$

$$٢ = ٢س \quad ٣ = ٢س$$

$$٢ = ٢س \quad ٣ = ٢س$$

$$\{٢, ٣\} = \text{ح.م}$$

٣ حل المعادلة :

$$١٢ = ٢س + ٥ - ٢س$$

النوع الأخير

أكمل: إذا كان $d = (s)$ فإن:

$$d = 1 \quad d = (1)$$

$$d = 2 \quad d = (2)$$

$$d = -1 \quad d = (-1)$$

$$d \times s = 1 + s = (1 + s)$$

$$d \div s = 1 - s = (1 - s)$$

$$\frac{3 + 3س + 5 + 3س}{1 + 3س + 3 + 3س} = \text{الطرف الأيمن}$$

$$= \frac{3 \times 3س + 5 \times 3س}{3 \times 3س + 3 \times 3س} =$$

$$9 = \frac{27 + 24س}{3 + 27} = \frac{(3 + 5)س}{(3 + 3)س}$$

$$9 = 3 = (2) د$$

∴ الطرفان متساويان

6 إذا كان د (س) = 3س فأثبت أن :

$$د(2) = \frac{د(3س) + د(5س)}{د(1س) + د(3س)}$$

٨ إذا كان $d = (s) = 2$ فاثبت أن :

$$\frac{17}{4} = \frac{d(s-1)}{d(s+1)} + \frac{d(s+1)}{d(s-1)}$$

المقدار

$$\frac{1-s}{1+s} + \frac{1+s}{1-s}$$

$$\frac{1-s \times 1+s}{1+s} + \frac{1+s \times 1-s}{1-s} =$$

$$\frac{17}{4} = \frac{1}{4} + 4 = \frac{1-s}{2} + \frac{2}{1-s} =$$

الدالة الأسية وتطبيقاتها

مهم جداً جداً

شرط الدالة الأسية

$$d = (s) = m \text{ م}$$

حيث m ← الأساس \exists ح⁺ - { 1 }

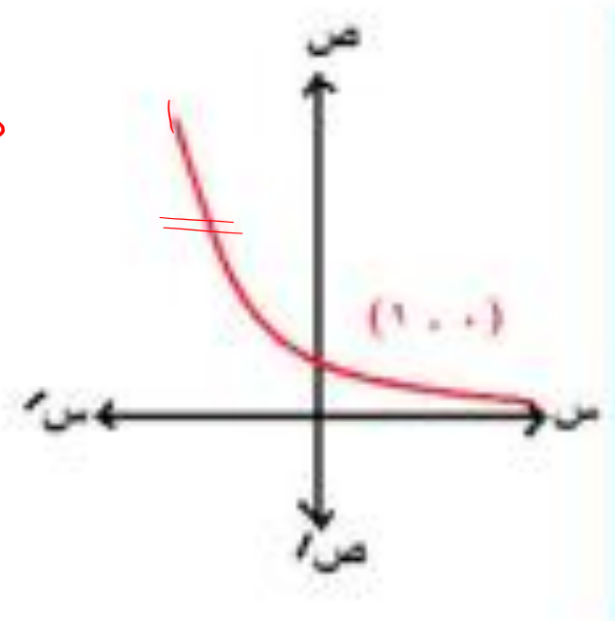
الأساس عدد موجب لا يساوي الواحد

ملخص التمثيل البياني

$$d = (s) = p$$

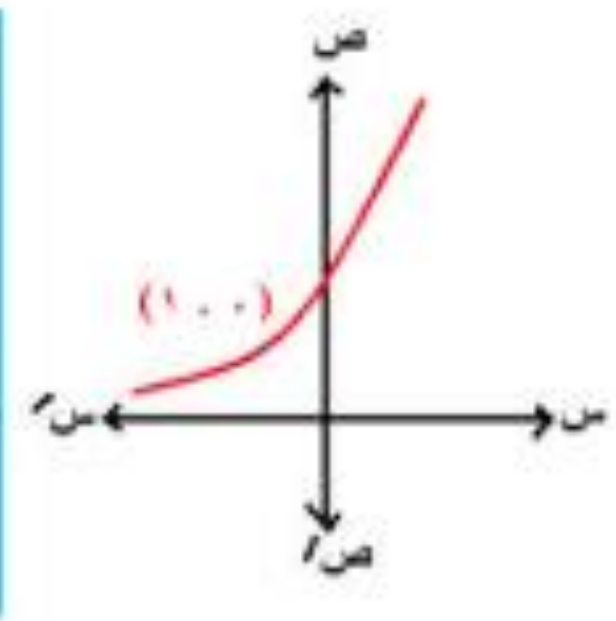
٢

$$1 > p > 0$$



١

$$1 < p$$



المجال = ح

المدى = ح + تقع بأكملها فوق محور السينات

منحني الدالة الأسية يمر بالنقطة (١, ٠)

الدالة أحادية

تزايدية عندما $1 < p$ (دالة نمو أسّي)

وتناقصية عندما $1 > p > 0$ (دالة تضائل أسّي)



تطبيقات علي الدالة الأسية

التضائل الأسي	النمو الأسي
$\underline{P} = (r - 1)^n$	$\underline{P} = (r + 1)^n$

حيث : P — الأصل — رأس المال

r — معدل الزيادة والنقصان

n — عدد السنوات — عدد المباريات

عدد الأسابيع حسب المسألة

تمارين

مثل كلاً من الدوال الآتية :

(١) $V = 2^S + 1$ ← إزاحة رأسية وحدة لأعلى

(٢) $V = \left(\frac{1}{2}\right)^S - 2$ ← إزاحة رأسية وحدتين لأسفل

(٣) $V = -2^S$ ← انعكاس في محور السينات

(٤) $V = \left(\frac{1}{2}\right)^S -$ ← انعكاس في محور السينات

مثال ١ : اشترى المستر سيارة بمبلغ $P = 250000$ جنية ويزيد سعرها بمعدل ٦ % كل سنة
 $r = 0.06$

المطلوب :

١ اكتب دالة أسية تعبر عن سعر السيارة

٢ قدر قيمة السيارة بعد ٥ سنوات $n = 5$

الحل

$$A(n) = P(1+r)^n$$

$$P = 250000 \text{ جنية}$$

$$r = \frac{6}{100} = 0.06$$

$$n = 5 \text{ حل أنت}$$

مثال ٢ : يتناقص عدد مشجعي أحد الأندية بمعدل

٤ ٪ لكل مباراة يخسروها فإذا كان عدد

المشجعين في أول مباراة $P = 36400$

المطلوب :

١) اكتب دالة أسية تعبر عن الخسارة \leftarrow تعادل

٢) قدر عدد الأشخاص بعد ١٠ مباريات $\nu = 10$

$$r = 0.04$$

دالة تضاول $P = (r - 1) \nu$

$$P = 36400 = r = \frac{4}{100} = 0.04$$

$$\nu = 10$$

العدد بعد المباراة العاشرة

$$= 36400 (1 - 0.04) = 24199.9$$

متناسق تقرب الأشخاص لأقرب وحدة

$$\approx 24200 \text{ مشجع}$$

آخر نوع : جملة القائدة المركبة

$$ج = P \left(\frac{r}{s} + 1 \right)^n$$

$$P = \text{الأصل} \quad r = \text{المعدل}$$

$$n = \text{عدد السنوات}$$

$$s = \text{فترة تقسيم العائد}$$

(عدد مرات الحصول على العائد خلال العام)

١ إذا كان العائد سنوي

$$s = 1$$

٢ إذا كان العائد ربع سنوي

$$s = 4$$

٣ إذا كان العائد شهري

$$s = 12$$

مثال ٣ : أودع رجل مبلغ $15,000^P$ جنيهه في أحد

البنوك التي تعطي فائدة مركبة قدرها 7% أوجد

$$r = 0.07$$

جملة المبلغ بعد مرور 10 سنوات في الحالات

$$n = 10$$

الآتية .

→ =

$$0.07 = \frac{r}{100} = r$$

$$A = P \left(1 + \frac{r}{n} \right)^{nt}$$

$$n = 1$$

$$n = 4$$

$$n = 12$$

$$15,000 = P$$

$$10 = n$$

1) العائد سنوي ←

2) العائد ربع سنوي ←

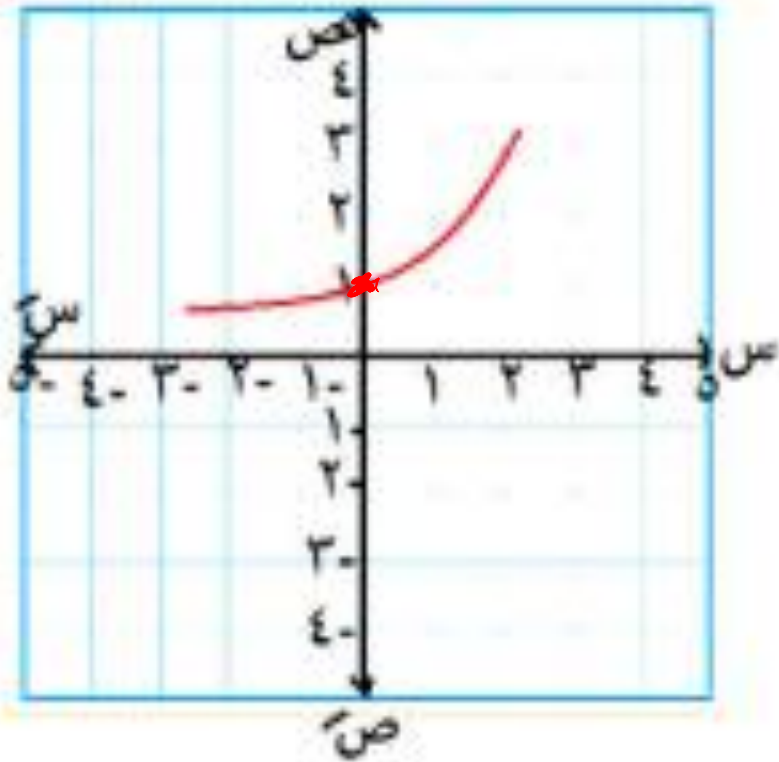
3) العائد شهري ✓

تمثيل الدوال

مثل كل من الدوال التالية وعين المجال والمدى
والنوع والأطراف :

١ د(س) = ٢ س

الحل



المجال = ح

المدى : ح
 $|\infty, 0| =$

النوع :
ليست زوجية
وليست فردية

الأطراف : تزايدية على المجال

$$D(s) = 3s + 1$$

(٤٠٠)

إزاحة رأسية وحدة لأعلى (٢،٠)

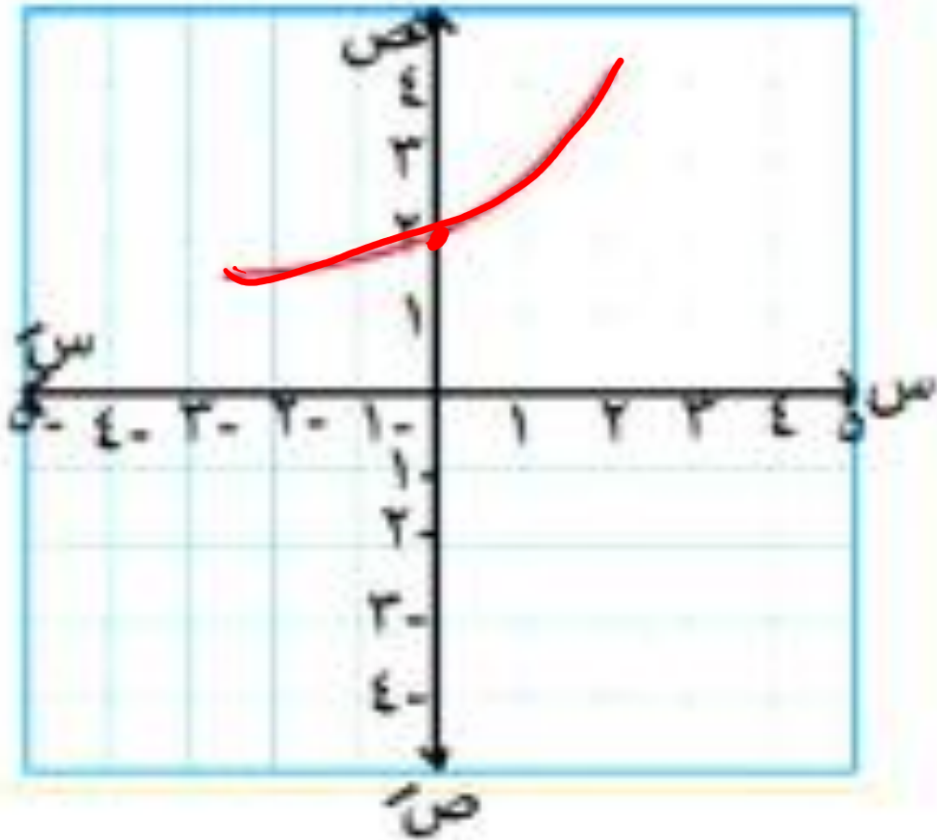
المجال = ح

المدى :

$$| \infty, 1 | =$$

النوع :

الأطراف :



د (س) = ٢ - س

(١ - ٢٠)

انعكاس في محور السينات

المجال = ح

المدى : ح

= | ٠ ، ∞ - |

النوع :

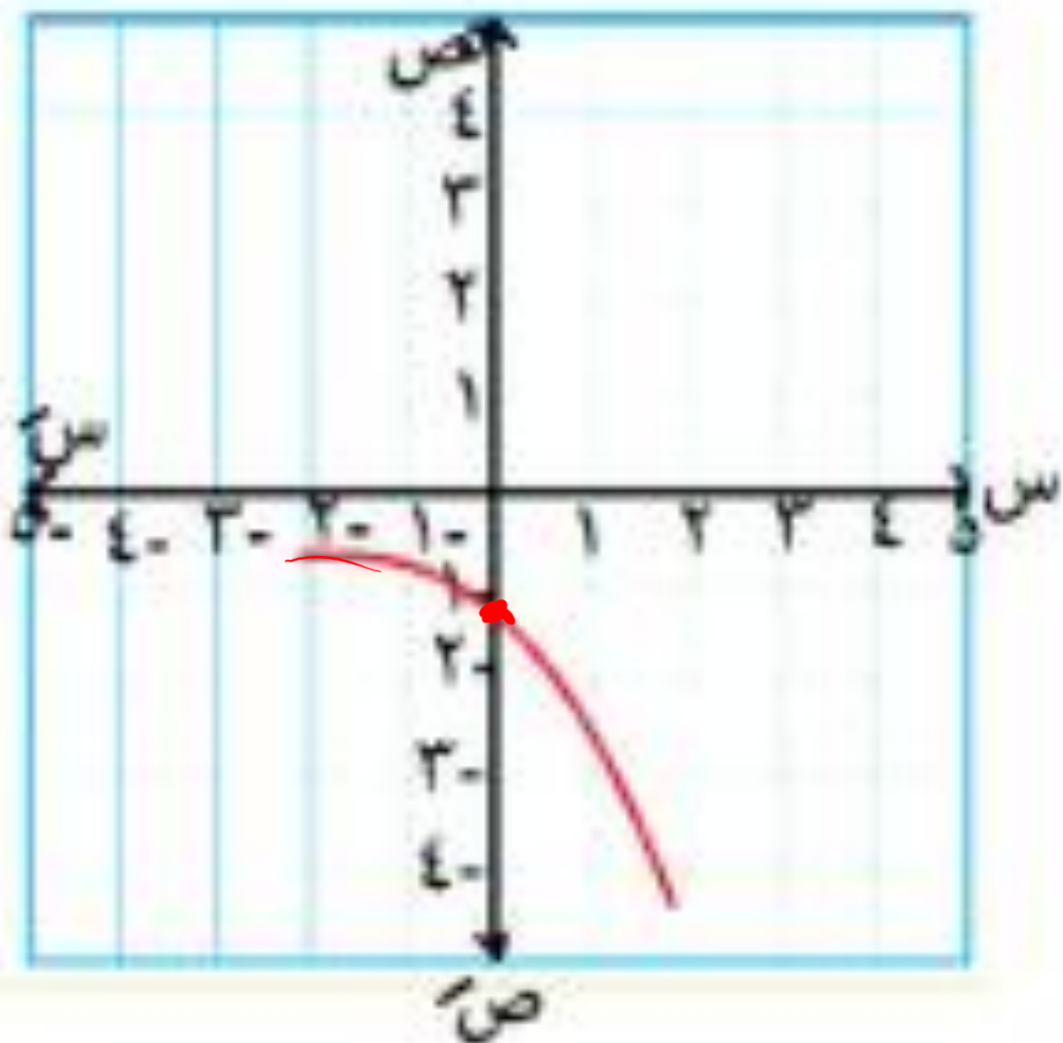
ليست زوجية

وليست فردية

الأطراد :

تناقصية علي

المجال

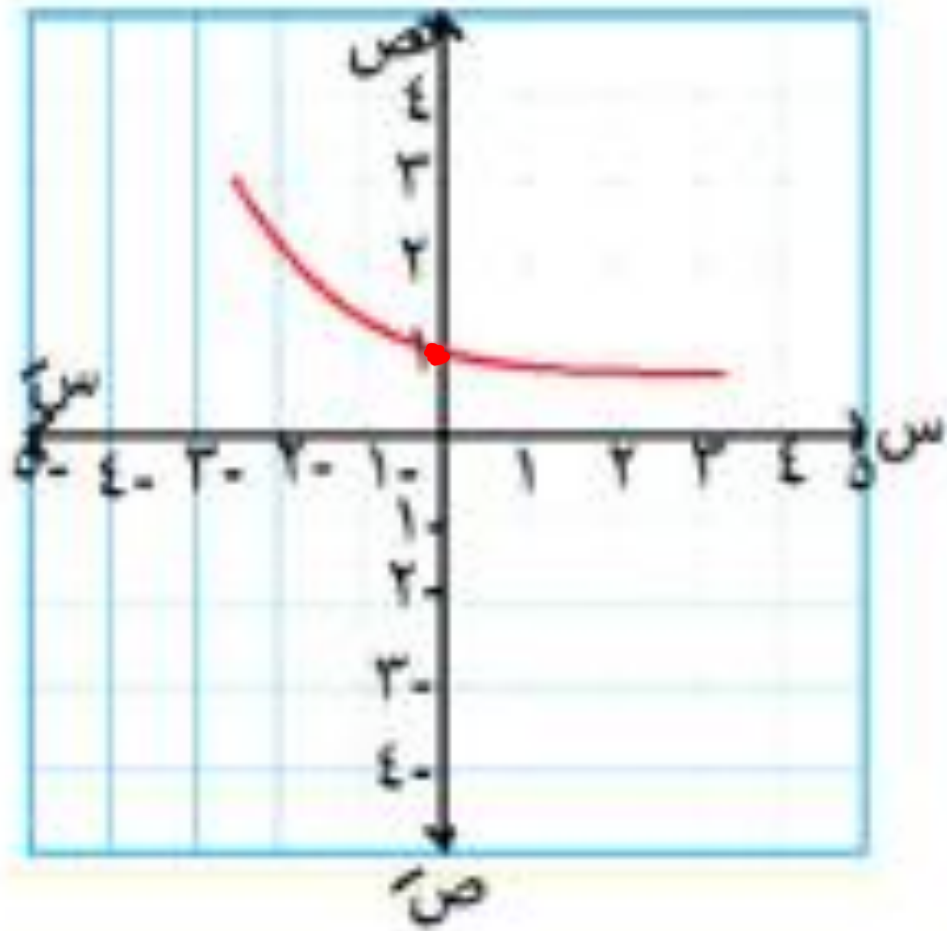


د (س) = $\left(\frac{1}{s}\right)$ س



هي نفسها د (س) = $\frac{1}{s-2}$ (س) (١٢٠)

$\frac{1}{\sqrt{s}}$ = $\left(\frac{1}{s}\right)$



المجال = ح
 المدي : ح +
 = $|\infty, 0|$
 النوع :
 ليست زوجية
 وليست فردية
 الأتراد :
 تناقصية علي
 المجال

د(س) = - (1/2) س

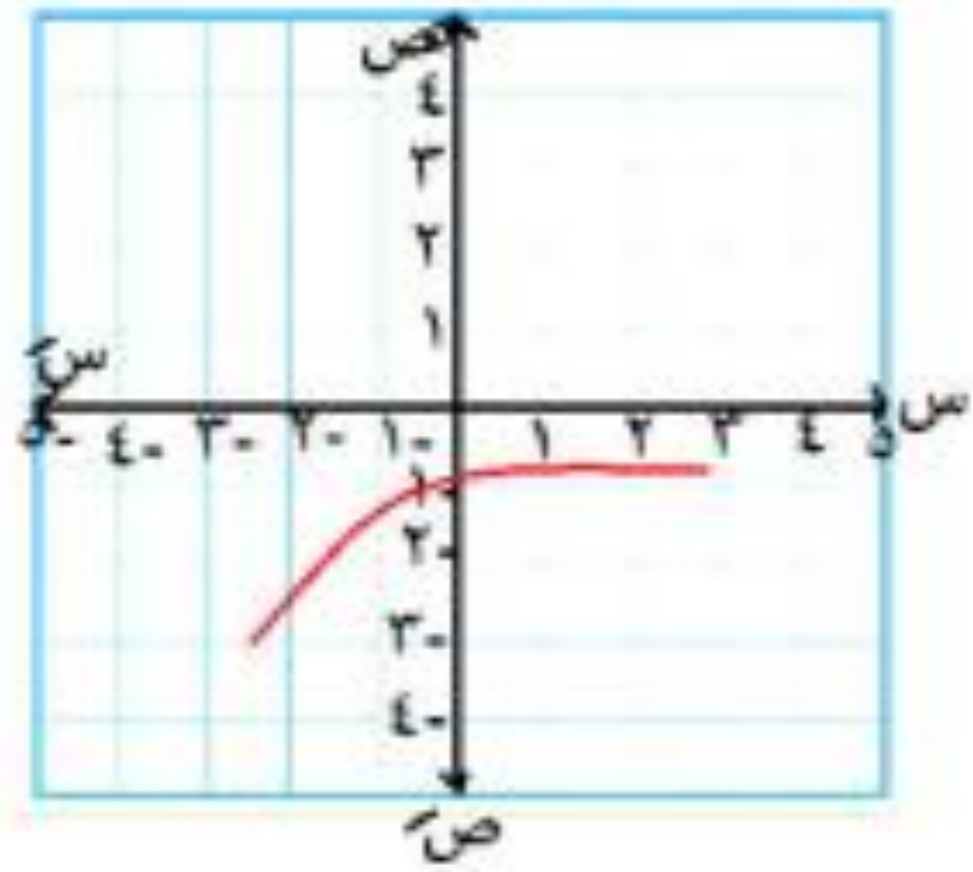
انعكاس في محور السينات

المجال =

المدى :

النوع :

الأطراف :



الدالة العكسية "علمي فقط"

شروط أن يكون للدالة صورة عكسية
أن تكون الدالة أحادية .

أمثلة :

بيان د = $\{(2,0), (3,1), (4,2)\}$

بيان د⁻¹ = $\{(0,2), (1,3), (2,4)\}$

أكمل :

د (١ -) =

د⁻¹ (٢) = ^{مفر}

د⁻¹ (٣) = ^١

د⁻¹ (١) = ^{١ -}

ملاحظات هامة :

١ مجال د هو مدي د⁻¹

ومدي د هو مجال د⁻¹

٢ كل دالة ودالتها العكسية متماثلتين حول

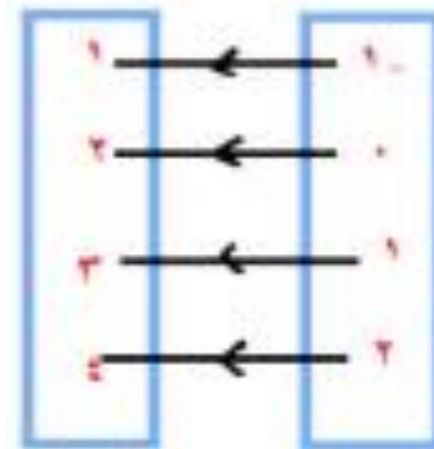
المستقيم ص = س

٣ لإثبات أن د ، ر كل منها عكسية للأخري

نثبت أن :

$(د(ر) = س) = (ر(د) = س)$

د مجال
ص ص



أمثلة : أكمل :

(١) صورة النقطة (٢ ، ١) بالانعكاس في

المستقيم $ص = س$ هي (٢٠١).

(٢) إذا كان $د = (٢)$ فإن

فإن $د^{-١} = (٦)$..

مثال ١ : إذا كان $d = 9 + 4s$

، $r = (s) = \frac{9 - s}{4}$ ، فاثبت أن :

كل منها عكسية للأخرى .

$$(d \ 0 \ r) = s = d = (r \ 0 \ s) \quad d = \left(\frac{9 - s}{4} \right)$$

$$= \left(\frac{9 - s}{4} \right) 4 = 9 - s = 9 + 9 - s = 9 +$$

$$(r \ 0 \ s) = s = r = (d \ 0 \ s) = r = (9 + 4s)$$

$$= \frac{4s}{4} = \left(\frac{9 - 9 + 4s}{4} \right) =$$

$$\Delta (d \ 0 \ r) = s = (r \ 0 \ s) = s =$$

∴ d, r كل منها عكسية للأخرى

تمرين

إذا كان $d = 2 - s$

، $r = s$ = $\frac{s + 3}{2}$ فاثبت أن :

d ، r كل منها عكسية للأخرى .

$$\therefore d = 2 - s = 2 - \frac{3 + s}{2}$$

$$= 2 - \left(\frac{3 + s}{2} \right)$$

$$= 2 - \frac{3 + s}{2} = 2 - \frac{3}{2} - \frac{s}{2} = \frac{4}{2} - \frac{3}{2} - \frac{s}{2} = \frac{1 - s}{2}$$

$$\therefore (d) = \frac{1 - s}{2} = \frac{1 - \frac{3 + s}{2}}{2} = \frac{\frac{2 - 3 - s}{2}}{2} = \frac{-1 - s}{4} = -\frac{1 + s}{4}$$

نثبت أن : $(d \circ r) = s = (r \circ d)$

$(d \circ r) = s = (r \circ d)$ كما صفا مكسب الاعلى

مثال ٢ : إذا كان $x = 2 + y$ فأوجد y

بتبديل المتغيرين

$$x = 2 + y$$

بتبديل الطرفين

$$y = x - 2$$

$$y = x - 2$$

$$x = 2 + y$$

$$y = x - 2$$

أوجد د⁻¹ للدالة د(س) = ٢س + ١

$$١ + ٢س = \sqrt{٢}$$

$$١ + \sqrt{٢}س = \sqrt{٢}$$

بتبديل

$$١ + \sqrt{٢}س = \sqrt{٢}$$

عكس الطرفين

$$١ - \sqrt{٢} = \sqrt{٢}س \times \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$(١ - \sqrt{٢}) \frac{١}{\sqrt{٢}} = \sqrt{٢}س$$

$$\frac{١ - \sqrt{٢}}{\sqrt{٢}} = ٢س$$

مثال 3 : إذا كان د (س) = $3 + \frac{1}{2 - س}$ فأوجد :

(1) مجال ومدى د (2) د⁻¹ معيناً المجال والمدى

نقطة التماثل (3, 2)

∴ مجال د = ح - {2} المدى = ح - {3}

إيجاد د⁻¹

بتبديل المتغيرين

$$3 + \frac{1}{2 - س} = ص$$

بتبديل الطرفين

$$3 + \frac{1}{2 - ص} = س$$

$$س = 3 + \frac{1}{2 - ص}$$

هنقلب الكسر

$$3 - س = \frac{1}{2 - ص}$$

$$\frac{1}{3 - س} = 2 - ص$$

$$2 + \frac{1}{3 - س} = ص$$

$$2 + \frac{1}{3 - س} = 2 - ص$$

مجال د⁻¹ = ح - {3}

مدى د⁻¹ = ح - {2}

تمرين

أوجد مجال ومدى د

ثم أوجد د⁻¹ معيناً المجال والمدى لكل من :

$$1 \quad \text{د (س)} = 3 + \frac{1}{5-s}$$

$$2 \quad \text{د (س)} = \frac{1}{4-s} + 4 \quad \text{ماذا تلاحظ}$$

□ نقضه تماثل (٣/٥)

المجال 2 - [٥] المدى 2 - [٣]

$$3 + \frac{1}{5-s} = \sqrt{s}$$

$$3 + \frac{1}{5-\sqrt{s}} = \sqrt{s}$$

$$3 - \sqrt{s} = \frac{1}{5-\sqrt{s}}$$

$$\frac{3-\sqrt{s}}{5-\sqrt{s}} = \frac{1}{5-\sqrt{s}}$$

$$0 + \frac{1}{3-\sqrt{s}} = \sqrt{s}$$

$$0 + \frac{1}{3-\sqrt{s}} = 0$$

(٣/٥)

المجال = 2 - [٣]

المدى = 2 - [٥]

مثال ٤ : إذا كان د (س) = $\sqrt{3 - س}$ + ٢

فأوجد :

١ مجال ومدى د ٢ د^{-١} معيناً المجال والمدى

$$\sqrt{3 - س} = ٢ - س$$

$$\sqrt{3 - س} = ٢ - س$$

$$\sqrt{3 - س} + س = ٢$$

$$\sqrt{3 - س} + س = ٢$$

$$\text{مجال د}^{-١} =]٢, \infty[$$

$$\text{مدى د}^{-١} =]٢, \infty[$$

مجال (د) $٠ \leq ٣ - س$

$$س \leq ٣$$

$$\text{مدى د} \quad]٢, \infty[$$

إيجاد د^{-١}

بتبديل المتغيرين $\sqrt{3 - س} + ٢ = ص$

نغير الطرفين $\sqrt{3 - ص} + ٢ = س$

$$٢ + \sqrt{3 - ص} = س$$

تمرین

$$(1) \quad \overline{2 + 3r - s}$$

$$(2) \quad \overline{4 + r - 5s} \quad \text{ماذا تلاحظ؟}$$

مثال ٤ : أوجد د^١ موضعاً المجال

للدالة د(س) = (س - ٢) + ٣ ، س ≥ ٢

مجال (د) س ≥ ٢ [٢ ، ∞ -]

مضي (د) س ≤ ٣] ∞ ، ٣]

إيجاد د^١

بتبديل المتغيرين ص = (س - ٢) + ٣

هنغير الطرفين ص = (س - ٢) + ٣

$$ص = ٣ + (٢ - ص)$$

بأخذ الجذر السالب ٣ - س = (٢ - ص)

$$\sqrt{٣ - س} = (٢ - ص)$$

$$ص = ٢ + \sqrt{٣ - س}$$

$$د = ٢ + \sqrt{٣ - س}$$

مجال د^١ =] ∞ ، ٣]

مضي د^١ = [٢ ، ∞ -]

تمرین

$$(۱) \quad d(n) = (n-5)^2 + 1, \quad n \geq 1$$

$$(۲) \quad d(n) = (n+1)^2 + 3, \quad n \leq 2$$

مثال ٥ : إذا كانت د: ح⁺ - ح

$$\text{حيث د (س) = } \frac{1}{س^2 + 1} \text{ فاوجد د}^{-1}$$

مبيناً المجال والمدي .

مجال (د) - ح⁺ س < ٠

مدي (د)

[١ ، ٠]

إيجاد د^{-١}

بتبديل المتغيرين

$$ص = \frac{1}{س^2 + 1}$$

$$س = \frac{1}{ص^2 + 1}$$

هنقلب الطرفين

$$س = \frac{1}{ص^2 + 1}$$

$$ص^2 + 1 = \frac{1}{س}$$

$$ص^2 = \frac{1}{س} - 1$$

$$ص = \sqrt{\frac{1}{س} - 1}$$

مجال د^{-١} = [١ ، ٠]

مدي د^{-١} = ح⁺

آخر ملاحظة

الدوال العكسية التي تكون صورتها العكسية هي نفسها

١) الدوال الخطية التي معامل $s = -1$

$$d(s) = b - s$$

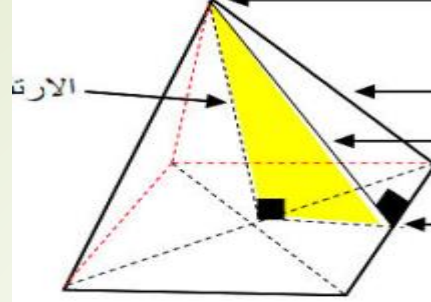
٢) الدوال الكسرية التي علي صورة

$$d(s) = \frac{1}{s - k} + k$$

مثل: $d(s) = \frac{1}{s - 5} + 5$

$$d(s) = \frac{1}{s - 7} + 7$$

$$d(s) = \frac{1}{s + 9} - 9$$



الدرس الثاني: الهرم

ملاحظات هامة

المركز الهندسي لمتوازي الاضلاع
وأولاده هي نقطة تقاطع قطريه

المركز الهندسي للمثلث نقطة تلاقي
متوسطاته

اللي هي بتقسم كل منها بنسبة ١ : ٢ من
جهة القاعدة

الهرم القائم إذا كان موضع العمودي
المرسوم رأس الهرم على قاعدته
(ارتفاعه) يمر بالمركز الهندسي.

٤

١ الهرم هو مجسم له قاعدة واحدة على
شكل مضلع وجميع أوجهه الأخرى
مثلثات ويسمى بحسب أضلاع قاعدته

٥

٢ المستقيم العمودي على مستوى يكون
عمودياً أي مستقيم في المستوى

٦

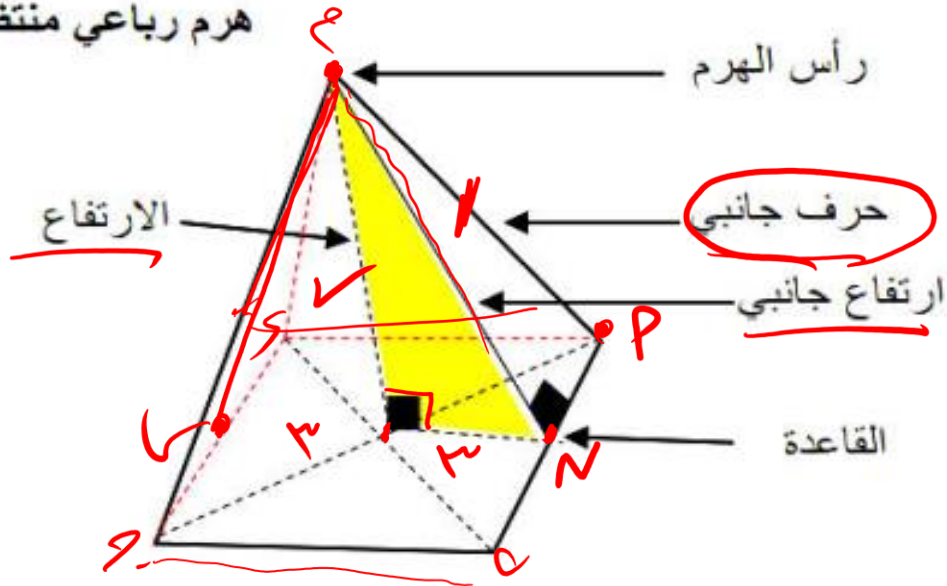
٣ المضلع المنتظم تكون أضلاعه متساوية
في الطول وزواياه متساوية في القياس
مثل المثلث المتساوي الأضلاع
المربع الخماسي المنتظم،.....

لاحظ أن

١ كل هرم منتظم فهو هرم قائم وليس العكس.

٢ يسمى الهرم الثلاثي منتظم الوجوه إذا كان جميع أوجهه ومنهم القاعدة مثلثات متساوية الأضلاع ومتطابقة.

هرم رباعي منتظم



الهرم المنتظم

هو هرم قائم قاعدته مضلع منتظم

خواصه

كل حواس

١ أحرفه الجانبية متساوية في الطول.
٢ ارتفاعاته الجانبية متساوية في الطول.
٣ أوجهه الجانبية مثلثات متساوية الساقين.

مثال (١) PM ب ج e هرم رباعي منتظم طول

ضلع قاعدته 2 سم وارتفاعه 1 سم
أوجد ارتفاعه الجانبي

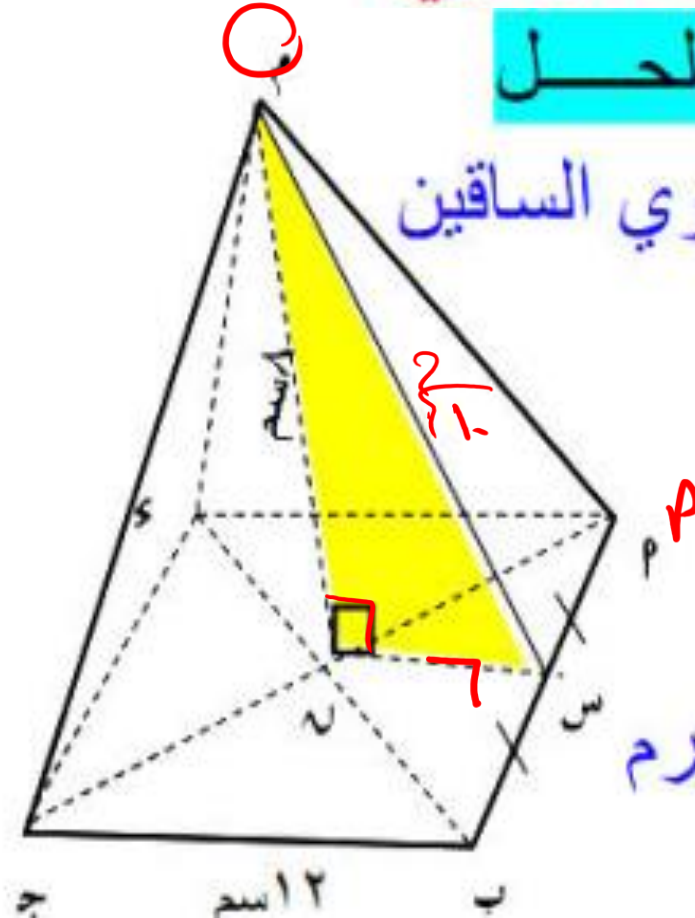
الحل

PM ب مثلث متساوي الساقين

s منتصف PM ب

PM هو

الارتفاع الجانبي للهرم



\therefore s منتصف PM ب ، n منتصف PM ج

\therefore s n قطعة مستقيمة مرسومة بين منتصفي

ضلعين في مثلث = $\frac{1}{2}$ طول الضلع

الثالث

\therefore s n = 1 سم

$$\therefore PM = s = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5} = 1.0 \text{ سم}$$

الارتفاع الجانبي



مثال (٢) ٢٢ ب ج ء هرم رباعي منتظم

ارتفاعه ٢٠ سم و ارتفاعه الجانبي ٢٥ سم أوجد طول ضلع قاعدة الهرم

الحل

∴ س منتصف م ب

Δ م م ب متساوي الساقين

∴ م س هو

الارتفاع الجانبي

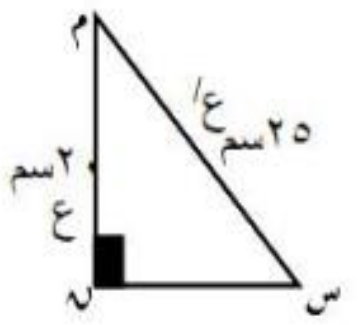
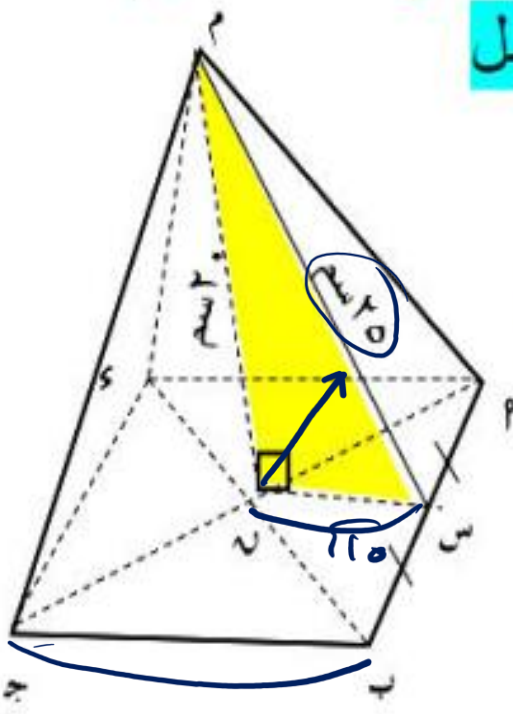
∴ م ن ل س ن

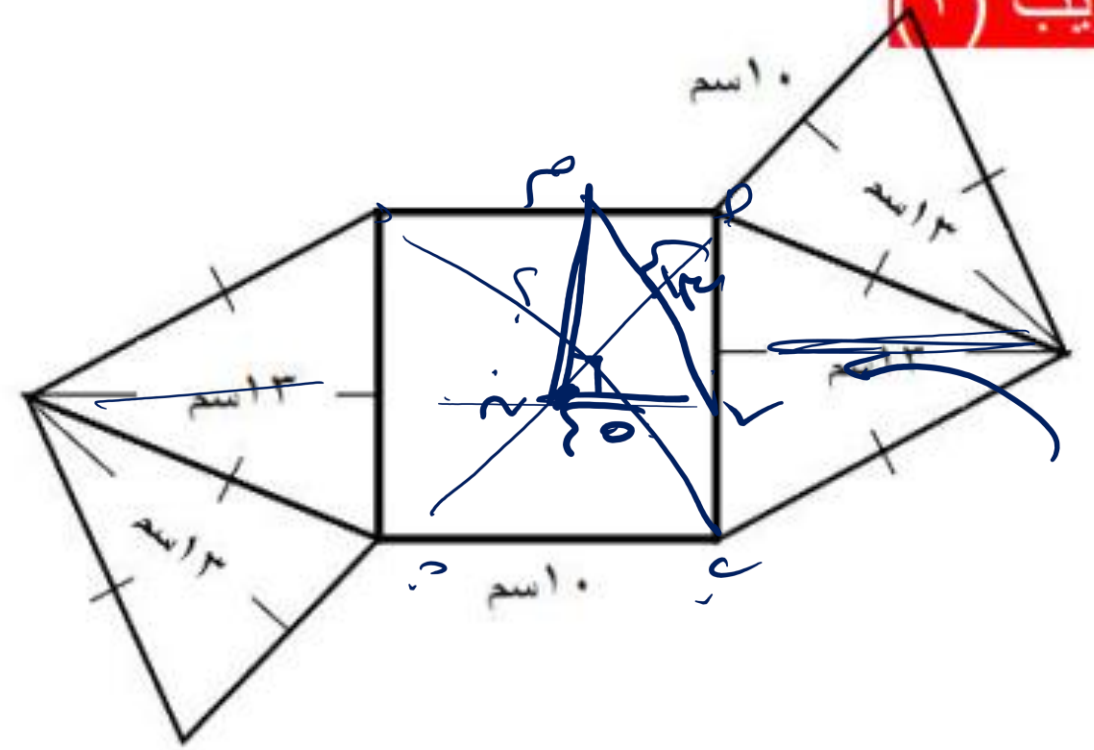
$$\sqrt{(20)^2 - (25)^2} = س ن$$

$$= ١٥ سم$$

∴ س منتصف م ب ، ن منتصف م ج

$$\therefore ب ج = ١٥ \times ٢ = ٣٠ سم$$





ده هرم رباعي منتظم الوجوه ولو مش
 مصدقني أسأله
 طول ضلع قاعدته = اسم ١
 الجانبي = اسم ٣
 احسب ارتفاعه

الارتفاع هـ

ب هـ هـ

بسطه المثلث متساوي الساقين

$$هـ = \sqrt{١٣٣ - ٩٥} = ١٩$$

الارتفاع = ١٩

مثال (٣)

م م ب ج هرم ثلاثي منتظم قاعدته Δ م ب ج طول ضلع قاعدته ٦ سم وارتفاعه ٤ سم أوجد طول حرفه وارتفاعه الجانبي

∴ نقطة تلاقي متوسطات المثلث تقسم كل منها

بنسبة ٢ : ١ من ناحية القاعدة

$$\therefore ٣\sqrt{3} = \frac{٣\sqrt{3} \cdot ٢}{٣}$$

$$\therefore \text{س م} = \sqrt{٣}$$

$$\therefore \text{م م} = \sqrt{(٣\sqrt{3})^2 + (٤)^2}$$

$$\text{الارتفاع الجانبي} = \sqrt{١٩} \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م م} \perp \text{س م}$$

$$\therefore \text{م م} = \sqrt{(٣)^2 + (\sqrt{١٩})^2} = ٢\sqrt{٢} \text{ سم}$$

وهو طول حرف الهرم

الحل

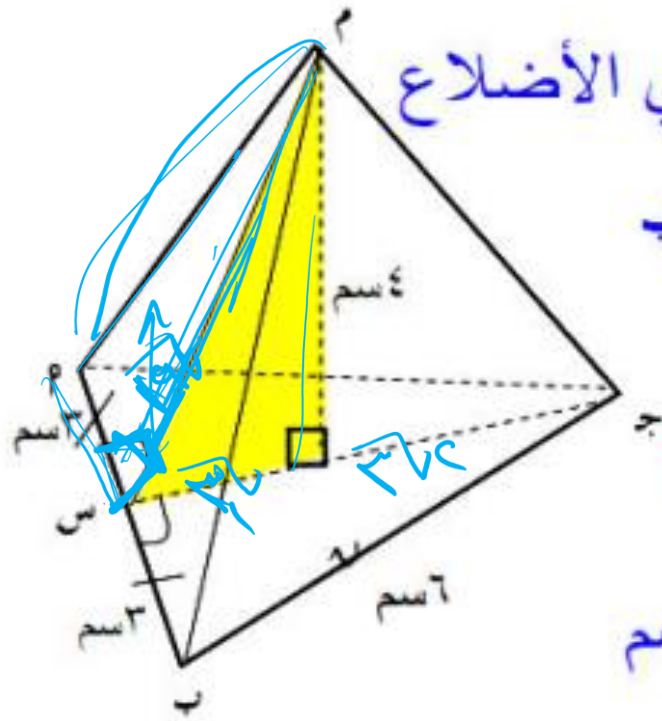
∴ Δ م ب ج متساوي الأضلاع

∴ س منتصف م ب

$$\text{ب س} = ٣ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ج ب} = \sqrt{٣^2 + ٤^2}$$

$$= ٥ \text{ سم}$$



ملاحظات

لأي مجسم قاعدته منطقة مضلعة يكون

[عدد الأوجه + عدد الرؤوس = عدد الأحرف + 2]

٢

في الهرم السداسي

عدد الأوجه = ٧

عدد الرؤوس = ٧

عدد الأحرف = ١٤ - ٢ = ١٢

٣

في الهرم الثلاثي

عدد الأوجه = ٤

عدد الرؤوس = ٤

عدد الأحرف = ٨ - ٢ = ٦

١

في الهرم الخماسي

عدد الأوجه = ٦

عدد الرؤوس = ٦

عدد الأحرف = ١٢ - ٢ = ١٠

المساحة الجانبية-الكلية والحجم للهرم المنتظم

المساحة الجانبية للهرم المنتظم

$$\frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي} =$$



المساحة الكلية

$$= \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدة}$$

حجم الهرم

$$= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

محيط ومساحة بعض الأشكال

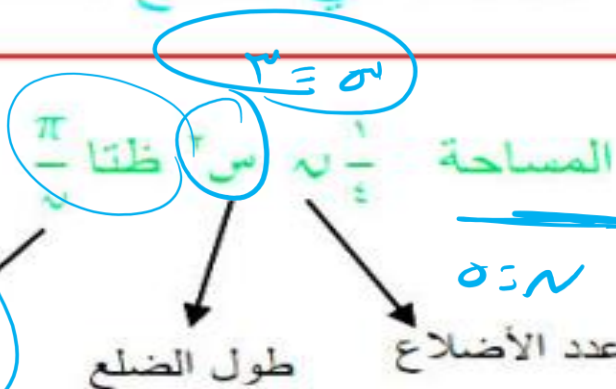


المحيط $3س$ المساحة $\frac{1}{2} \times ب \times ج$

$$\frac{1}{2} (ا-ع)(ب-ع)(ج-ع)$$

حيث $ع =$ نصف المحيط

مساحة أي مضلع منتظم



تذكر مساحة المعين $= \frac{1}{2}$ حاصل ضرب القطرين



المحيط $4س$ المساحة $س^2$



المحيط $5س$ المساحة $\frac{1}{2} \times س \times ظ$

المخروط

قلم



ارتفاع

قلم



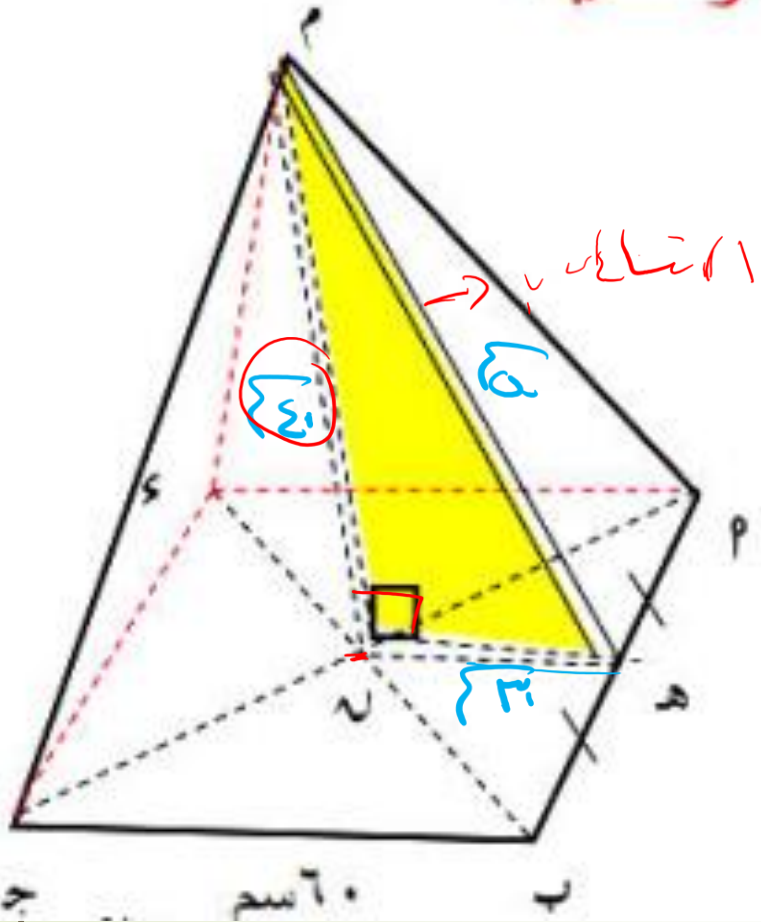
مثال (١)

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته 6 سم وارتفاعه الجانبي 5 سم أوجد

١ ارتفاع الهرم

٢ المساحة الجانبية والكلية

٣ حجم الهرم



الحل

لأنه عمودي على قاعد الهرم
∴ من فيثاغورث

$$\sqrt{(30)^2 - (50)^2} = \dots$$

$$= 40 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{40}{50} = \frac{4}{5}$$

$$\text{محيط القاعدة} = 4 \times \text{طول الضلع} =$$

$$4 \times 60 = 240 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{طول الضلع} \times$$

$$\text{نفسه} = (60)^2 = 3600 \text{ سم}^2$$

∴ ه منتصف م ب

∴ ه منتصف م ج

$$\therefore \text{ه ه} = 30 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{م ه} = \text{ه ه}$$

المساحة الكلية للهرم

$$= \text{المساحة الجانبية} + \text{مساحة القاعدة}$$
$$= 3600 + 6000 = 9600 \text{ سم}^2$$

حجم الهرم

$$= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 3600 \times 40 = 48000 \text{ سم}^3$$

المساحة الجانبية للهرم

$$= \frac{1}{2} \times \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي}$$

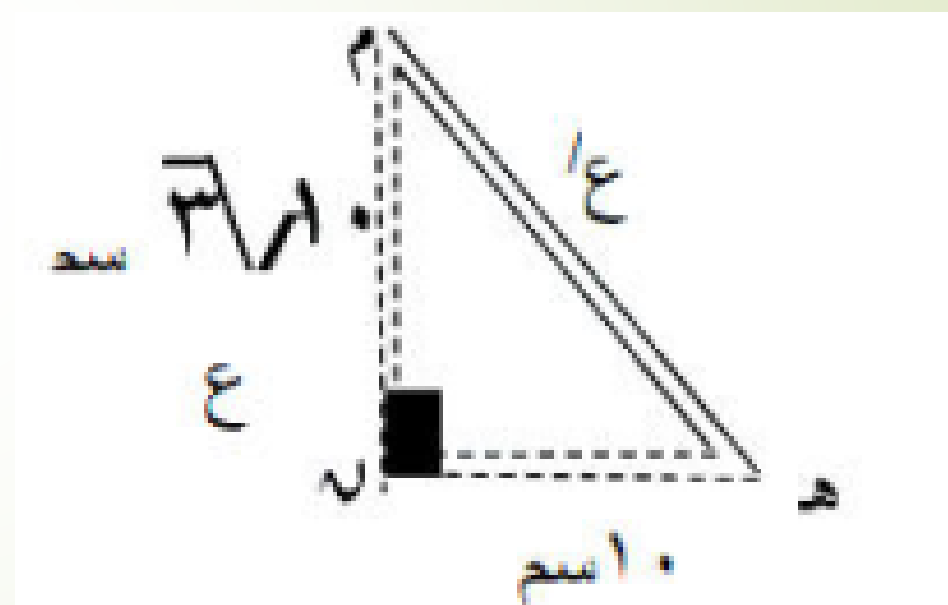
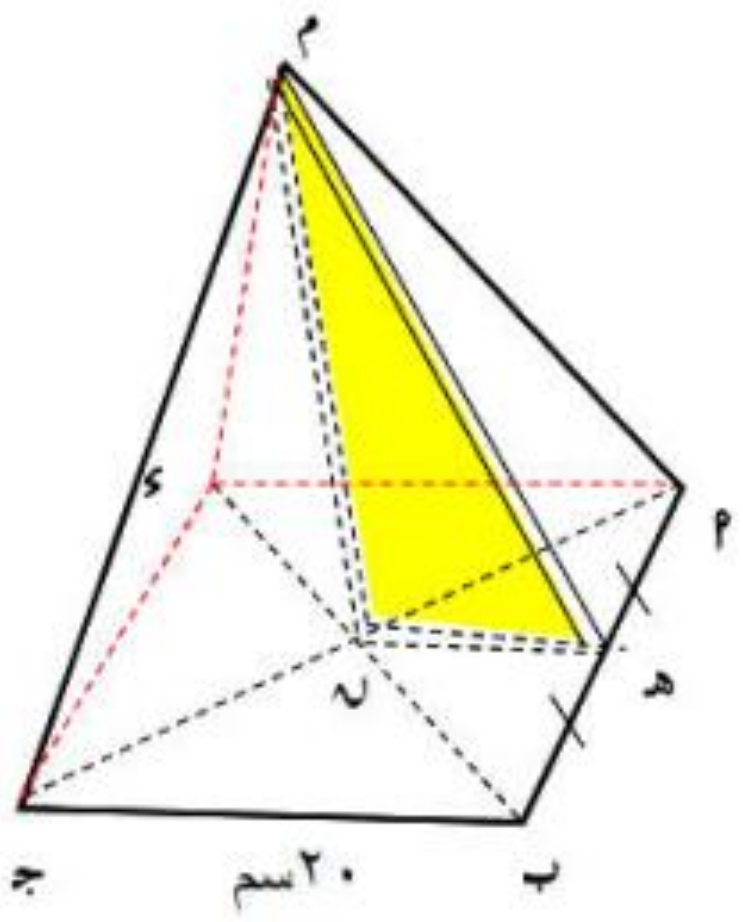
$$= \frac{1}{2} \times 240 \times 50 = 6000 \text{ سم}^2$$

مثال (٢) هرم رباعي منتظم طول ضلع

قاعدته ٢٠ سم وارتفاعه ١٠ سم أوجد

المساحة الجانبية

حجم الهرم



المساحة الجانبية

$$\frac{1}{2} = \text{محيط القاعدة} \times \text{الارتفاع الجانبي}$$

$$\frac{1}{2} = 20 \times 80 \times \frac{1}{2} = 800 \text{ سم}^2$$

اسم

$$ع = \sqrt{(10)^2 + (3\sqrt{10})^2} = 20 \text{ سم}$$

$$ع = 20 \text{ سم}$$

$$\therefore ع = 3\sqrt{10} \text{ سم}$$

$$\text{محيط القاعدة} = 4 \times \text{طول الضلع} =$$

$$80 = 20 \times 4 \text{ سم}$$

$$\text{مساحة القاعدة} = \text{طول الضلع} \times \text{نفسه} =$$

$$400 = (20)^2 \text{ سم}^2$$

$$\text{حجم الهرم} = \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$$

$$= \frac{1}{3} \times 400 \times 3\sqrt{10} = \frac{400\sqrt{10}}{3} \text{ سم}^3$$

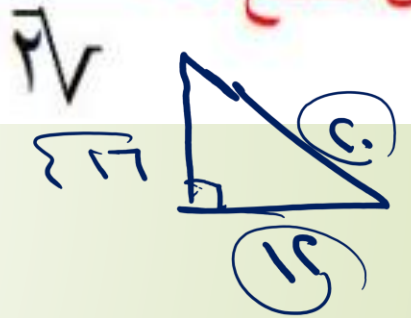
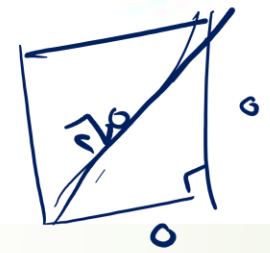
ملحوظة هامة

تدريب

هرم رباعي منتظم طول قطر قاعدته $2\sqrt{2}$
 سم وارتفاعه الجانبي = 20 سم أوجد مساحته
 الكلية وحجمه.

طول قطر المربع = طول الضلع $\times \sqrt{2}$

طول ضلع = $\frac{\text{طول قطره}}{\sqrt{2}}$



المساحة الجانبي =

$\frac{1}{2} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع الجانبي}$

$$\frac{1}{2} \times 96 \times 20 = 960$$

المساحة الكلية = المساحة الجانبي + مساحة القاعدة

$$960 + 170 = 1130$$

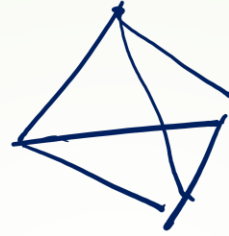
المساحة الجانبي = $\frac{2\sqrt{2} \times 20}{\sqrt{2}} = 40$

مساحة القاعدة = $32 \times 32 = 1024$

مساحة القاعدة = $\frac{1}{2} \times \text{القاعدة} \times \text{ارتفاع}$

$$\frac{1}{2} \times 32 \times 32 = 512$$

قوانين الهرم الثلاثي منتظم الوجوه



طول الحرف = l الارتفاع = e

$$e^2 = \frac{2}{3} l^2$$

١

المساحة الكلية للهرم الثلاثي منتظم

٢

$$A_{\text{وجوه}} = \frac{2}{3} \sqrt{3} l^2$$

حجم الهرم الثلاثي منتظم الوجوه =

٣

$$V = \frac{2}{12} \sqrt{3} l^3$$

مثال (3) ٢٢ ب ج ء هرم ثلاثي منتظم الوجوه

طول أي حرفه من أ حرفه $\sqrt{3}$

$\sqrt{3} = \text{ج}$

أوجد

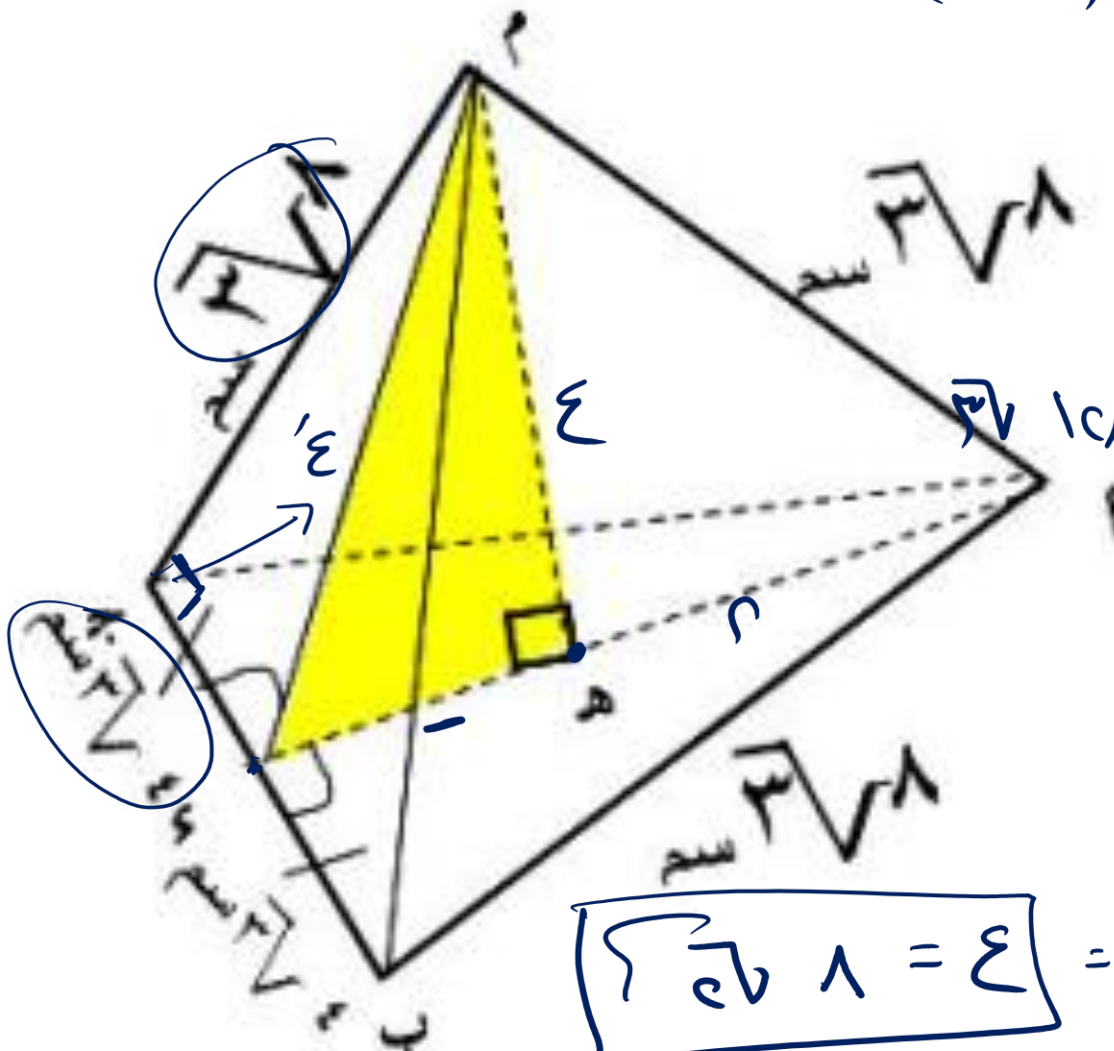
الارتفاع الجانبي ✓ ①

ارتفاع الهرم ✓ ②

المساحة الكلية للهرم ③

حجم الهرم ④

③ $\sqrt{3} \times \text{ج} = \sqrt{3} \times \text{ج} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$



$\sqrt{3} \times \text{ج} = \sqrt{3} \times \text{ج} = \sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$

$\sqrt{3} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$

$\sqrt{3} = \sqrt{3} \Rightarrow \sqrt{3} = \sqrt{3}$

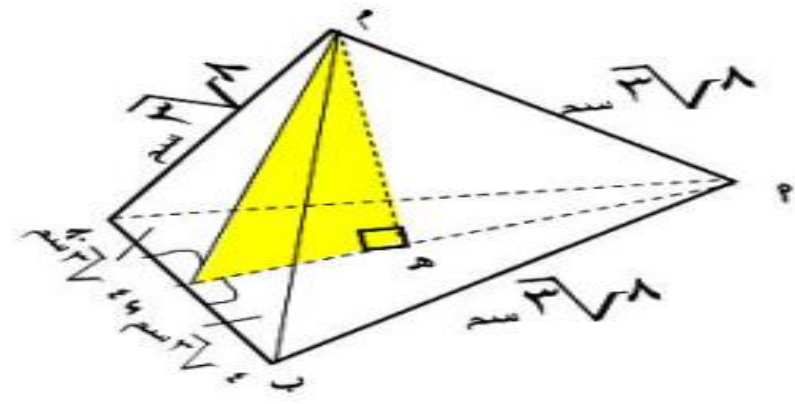
$\sqrt{3} = \sqrt{3} = \sqrt{3}$

④

* حجم الهرم = $\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{ارتفاع}$

$$128 = \frac{1}{3} \times (\sqrt{3} \times 8) \times \text{ارتفاع}$$

$$128 = \frac{1}{3} \times (\sqrt{3} \times 8) \times \text{ارتفاع}$$



① *

∴ الارتفاع الجانبي = $8\sqrt{3}$ سم

طول الحرف ل = $8\sqrt{3}$ سم

∴ الهرم منتظم الوجوه

$$L^2 = 3E^2$$

$$3E^2 = 2 \times (\sqrt{3} \times 8)^2$$

② *

$$E = \sqrt{\frac{2 \times 384}{3}} = 8 \text{ سم} \quad \therefore \text{ع} = 8 \text{ سم}$$

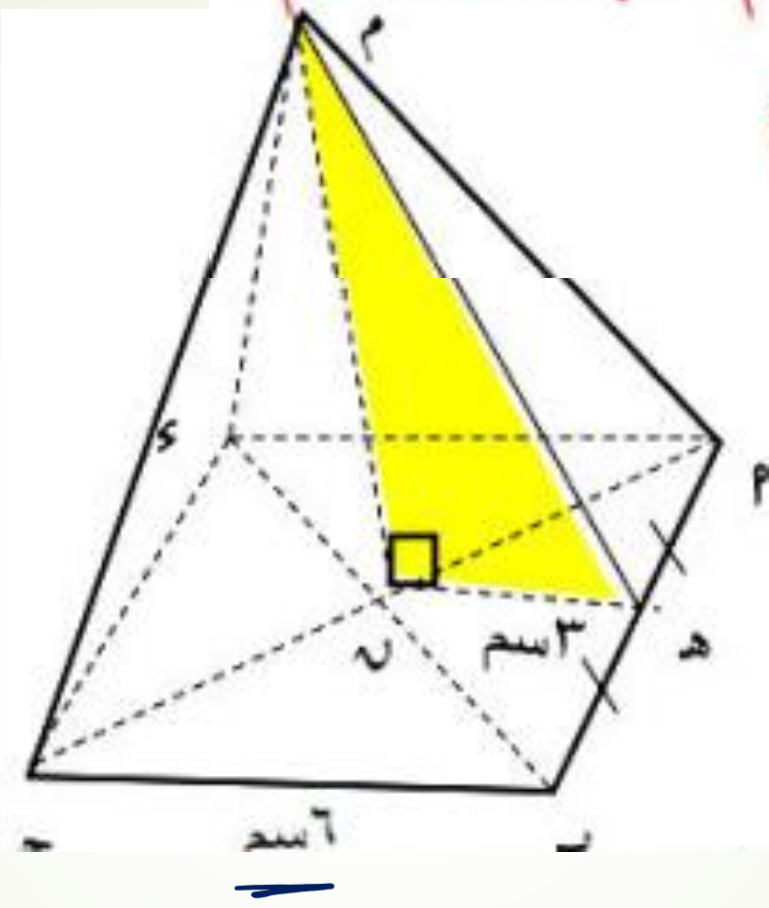
③ *

* المساحة الكلية = $3 \times \text{مساحة الوجه} + \text{مساحة القاعدة}$

$$192 = 3 \times (\sqrt{3} \times 8) \times 8 + \text{مساحة القاعدة}$$

مثال (٤) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٨ سم^٣

وطول ضلع قاعدته = ٦ سم
أوجد مساحته الكلية



مساحة السطح = ٦٦

الحل

مساحة القاعدة

$$= 6 \times 6 = 36 \text{ سم}^2$$

: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times ع

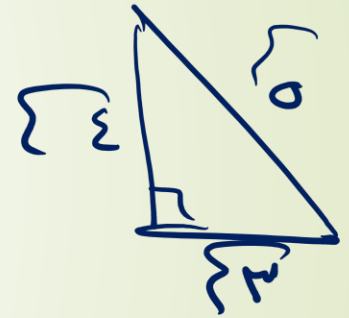
$$48 = \frac{1}{3} \times 36 \times ع$$

$$ع = \frac{48}{12} = 4 \text{ سم}$$

$$48 = 12ع$$

: الارتفاع = 4 سم

أكمل أنت....



المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$= \frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع} + \text{مساحة القاعدة}$$

$$= \frac{1}{3} \times 36 \times 4 + 36 = 48 + 36 = 84$$

الحل

$$\text{محيط المثلث} = 7 + 8 + 9 = 24$$

$$\text{نصف المحيط} = \frac{24}{2} = 12 \text{ سم}$$

مثال (٥) ٢٢ ب ج ٤ وهرم ثلاثي رأسه م على

بعد $5\sqrt{4}$ سم من قاعدته م ب ج وفيه م ب

= ٧ سم ، ب ج = ٨ سم ، م ج = ٩ سم أوجد

حجم الهرم

∴ مساحة المثلث م ب ج =

$$\sqrt{12(12-7)(12-8)(12-9)}$$

$$= \sqrt{12 \times 5 \times 4 \times 3} = 5\sqrt{12} \text{ سم}^2$$

حجم الهرم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \times 5\sqrt{12} \times 5\sqrt{4}$$

$$= 100 \text{ سم}^3$$

هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته
٨سم ارتفاعه ١٠سم فإن حجمه
=...سم^٣

$$\sqrt[3]{960} \text{ (ب)} \quad \sqrt[3]{320} \text{ (پ)}$$

$$554,25 \text{ (د)} \quad \frac{\sqrt[3]{320}}{3} \text{ (ج)}$$

$\frac{1}{3} \times \text{مساحة القاعدة} \times \text{الارتفاع}$

$$10 \times \frac{1}{4} \times 6 \times 6 \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$$

$$= 554,25$$

تذكر قانون مساحة المضلع المنتظم

$$\frac{1}{4} n s^2 \text{ ظنا } \frac{\pi}{n}$$

٥ النسبة بين المساحة الجانبية للهرم
الثلاثي المنتظم الوجوه إلى مساحته
الكلية = ..

$$4 : 1 \text{ (ب)} \quad 3 : 1 \text{ (پ)}$$

$$2 : 1 \text{ (د)} \quad 4 : 3 \text{ (ج)}$$

٤ إذا تضاعف طول ضلع قاعدة هرم
رباعي منتظم مع ثبوت ارتفاعه فإن
حجمه = ...

(پ) يتضاعف (ب) لا يتغير

(ج) يتضاعف ستة مرات (د) يتضاعف أربع مرات

عند زيادة طول ضلع القاعدة للضعف
تزداد المساحة ٤ أمثالها وكذلك الحجم

النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي

منتظم الوجوه : ارتفاعه = $2\sqrt{3} : 2 = \sqrt{3}$

$$\therefore 2\sqrt{3} = \sqrt{3} \cdot 2 \quad \text{بأخذ } \sqrt{3}$$

$$\sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3} \cdot 2 \quad \therefore \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} \quad \therefore \sqrt{3} \cdot 2 = \sqrt{3} \cdot 2$$

هرم رباعي قائم قاعدته معين طولها

قطريه 2 اسم ، 1 اسم وارتفاعه

• 1 اسم فإن حجمه = ... اسم³

هرم رباعي منتظم محيط قاعدته
٣٦سم وارتفاعه ١٠سم فإم
حجمه = ...سم^٣

$$١٨٠ (ب) \quad ٨١٠ (پ)$$

$$٢٧٠ (د) \quad ٣٦٠ (ج)$$

إذا كان مجموع أحرف هرم ثلاثي
منتظم الوجوه يساوي ١٨سم فإن
مساحته الكلية = ...سم^٢

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{٤} (ب)$$

$$\frac{\sqrt[2]{27}}{٤} (پ)$$

$$\frac{\sqrt[3]{27}}{٢} (د)$$

$$\sqrt[3]{9} (ج)$$

هرم منتظم حجمه ٢سم^٣ ومساحة
قاعدته ٤سم^٢ فإن ارتفاعه = ...سم

$$٦ (ب)$$

$$٣ (پ)$$

$$٢ (د)$$

$$٩ (ج)$$

هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية
= ٣٠سم^٢ ، وارتفاعه الجانبي ٥سم
فإن محيط قاعدته = ...سم

$$١٢ (ب)$$

$$٦ (پ)$$

$$٣٦ (د)$$

$$٢٤ (ج)$$

٩

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته
١٠ اسم ، ومساحة أحد أوجهه الجانبية
٦٠ اسم^٢ فإن مساحته الكلية = ... اسم^٢

٦٠٠ (٢) ٣٤٠ (ب)

١٦٠ (ج) ٢٤٠ (د)

١٣

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته
١٠ اسم ، وارتفاعه الجانبي ٣ اسم
تكون مساحته الجانبية ... اسم^٢

٢٦٠ (٢) ٣٦٠ (ب)

١٣٠ (ج) ٥٢٠ (د)

١٠

هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه
١٠ اسم فتكون مساحته الكلية = ... اسم^٢

٤٠ (٢) ١٠٠ (ب)

٣√١٠٠ (ج) ٣√٢٥ (د)

١٤

هرم رباعي منتظم محيط قاعدته
٦٤ اسم وارتفاعه ٣ اسم فإن حجمه
يساوي ... اسم^٣

٢٦٥ (٢) ٥٦٢ (ب)

٢٥٦ (ج) ٦٥٢ (د)

هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته
= طول ارتفاعه الجانبي فإن النسبة
بين مساحته الجانبية ومساحته
الكلية = ...

$$(پ) ٣ : ٢ \quad (ب) ٣ : ٤$$

$$(ج) ٢ : ١ \quad (د) ٣ : ٥$$

١٥

هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية
= ٣٠ سم^٢ ، ارتفاعه الجانبي = ٥ سم
فإن محيط قاعدته = ... سم

$$(پ) ٦ \quad (ب) ١٢$$

$$(ج) ٢٤ \quad (د) ٣٦$$

هرم رباعي منتظم مساحته الكلية
٧٠ سم^٢ ، ومساحته الجانبية ٤٥ سم^٢
فإن ارتفاع الهرم = ... سم

$$(پ) ٢,٥ \quad (ب) \sqrt{٥}$$

$$(ج) \sqrt{٤٧} \quad (د) ٤,٥$$

١ ٢٢ ب ج ء هرم رباعي منتظم طول

ضلع قاعدته ٠ اسم ، وارتفاعه ٢ اسم
، أوجد ارتفاعه الجانبي (٣ اسم)

٢ ٢٢ ب ج ء هرم رباعي منتظم ارتفاعه

٢٠ اسم وارتفاعه الجانبي ٢٥ اسم ، أوجد
طول ضلع قاعدة الهرم (٣٠ اسم)

- ١٧) النسبة بين طول حرف الهرم الثلاثي المنتظم الوجوه : ارتفاعه =
 (١) $3\sqrt{2} : 2\sqrt{2}$ (ب) $2 : 3\sqrt{2}$ (ج) $2 : \sqrt{2}$ (د) $3 : 3\sqrt{2}$
- ١٨) النسبة بين طول حرف الهرم المنتظم الوجوه : ارتفاعه الجانبي =
 (١) $3\sqrt{2} : 2\sqrt{2}$ (ب) $3 : 2\sqrt{2}$ (ج) $2 : \sqrt{2}$ (د) $3 : \sqrt{2}$
- ١٩) إذا قطعنا هرمًا رباعيًا منتظمًا بمستوى يوازي قاعدته فإن المقطع الحادث يكون
 (١) مثلثًا. (ب) مربعًا. (ج) مستطيلًا. (د) دائرة.
- ٢٠) هرم رباعي قائم قاعدته معين طولاً قطريه ١٢ سم ، ٨ سم وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه = سم^٣
 (١) ٤٠ (ب) ٨٠ (ج) ١٦٠ (د) ٢٠٠
- ٢١) هرم رباعي منتظم محيط قاعدته ٣٦ سم ، وارتفاعه ١٠ سم فإن حجمه يساوي سم^٣
 (١) ٨١٠ (ب) ١٨٠ (ج) ٣٦٠ (د) ٢٧٠
- ٢٢) هرم سداسي منتظم طول ضلع قاعدته = ٨ سم ، ارتفاعه = ١٠ سم فإن حجمه يساوي سم^٣
 (١) $3\sqrt{2} 220$ (ب) $3\sqrt{2} 960$ (ج) $\frac{3\sqrt{2} 220}{3}$ (د) ١٦٠
- ٢٣) هرم منتظم حجمه ١٢ سم^٣ ومساحة قاعدته ٤ سم^٢ فإن ارتفاعه = سم.
 (١) ٣ (ب) ٦ (ج) ٩ (د) ٢
- ٢٤) هرم رباعي منتظم حجمه ٦٤ سم^٣ وارتفاعه = ٦ سم فإن محيط القاعدة = سم.
 (١) ٨ (ب) $2\sqrt{2} 8$ (ج) ١٦ (د) $2\sqrt{2} 16$
- ٢٥) هرم رباعي منتظم حجمه ٤٨٠ سم^٣ وطول ضلع قاعدته ١٢ سم فإن ارتفاعه = سم.
 (١) ١٠ (ب) ٢٠ (ج) ٣٠ (د) ١٥
- ٢٦) إذا كان حجم هرم سداسي منتظم يساوي $8\sqrt{2}$ سم^٣ وارتفاعه يساوي ٤ سم فإن محيط قاعدته = سم.
 (١) ٢ (ب) ١٢ (ج) ٦ (د) $3\sqrt{2} 6$
- ٢٧) هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته ١٠ سم ، وارتفاعه الجانبي ١٣ سم تكون مساحته الجانبية سم^٢
 (١) ٢٦٠ (ب) ٣٦٠ (ج) ١٣٠ (د) ٥٢٠
- ٢٨) هرم رباعي منتظم مساحة قاعدته = ١٠٠ سم^٢ وارتفاعه ١٢ سم فإن مساحته الجانبية تساوي سم^٢.
 (١) ٢٦٠ (ب) ٥٢٠ (ج) ١٣٠ (د) ٣٦٠
- ٢٩) المساحة الكلية لهرم رباعي قائم قاعدته مضلع منتظم طول قطره = $10\sqrt{2}$ سم وارتفاعه = $5\sqrt{2}$ سم تساوي سم^٢.
 (١) ٤٠ (ب) ١٠٠ (ج) ٢٠٠ (د) ٣٠٠

٣٠) هرم رباعي منتظم مساحته الجانبية = ٣٠ سم^٢ ، ارتفاعه الجانبي = ٥ سم

فإن محيط قاعدته = سم.

(١) ٦ (ب) ١٢ (ج) ٢٤ (د) ٣٦

٣١) هرم ثلاثي منتظم الوجوه ، وطول حرفه ١٠ سم فتكون مساحته الكلية يساوي سم^٢؟

(١) ٤٠ (ب) ١٠٠ (ج) ٣٧٠ (د) ٣٧٢٥

٣٢) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي ١٨ سم

فإن مساحته الكلية = سم^٢؟

(١) $\frac{٢\sqrt{٢٧}}{٤}$ (ب) $\frac{٣\sqrt{٢٧}}{٤}$ (ج) $٣\sqrt{٩}$ (د) $\frac{٣\sqrt{٢٧}}{٢}$

٣٣) إذا كانت مساحة هرم منتظم الوجوه الكلية = $٣\sqrt{٣٦}$ سم^٢ فإن مجموع أطوال أحرفه = سم.

(١) ٦ (ب) ١٢ (ج) ١٨ (د) ٣٦

٣٤) هرم ثلاثي منتظم الوجوه مساحته الكلية = $٣\sqrt{٩}$ سم^٢ فإن طول حرفه = سم.

(١) ٣ (ب) ٩ (ج) ٢٧ (د) $٣\sqrt{٩}$

٣٥) هرم ثلاثي منتظم طول ضلع قاعدته ٦ ل سم وارتفاعه ل سم فإن مساحته الجانبية سم^٢؟

(١) $٣\sqrt{٢٧}$ ل (ب) ١٨ ل (ج) $٣\sqrt{٩}$ ل (د) ٣٦ ل

٣٦) هرم ثلاثي منتظم الوجوه طول حرفه ٦ سم يكون حجمه = سم^٣؟

(١) $٣\sqrt{٢٧}$ (ب) $٣\sqrt{٣٦}$ (ج) $٢\sqrt{٥٤}$ (د) $٢\sqrt{١٨}$

٣٧) إذا كان مجموع أطوال أحرف هرم ثلاثي منتظم الأوجه يساوي ١٨ سم فإن حجمه = سم^٣؟

(١) $٢\sqrt{٩}$ (ب) $\frac{٢\sqrt{٩}}{٤}$ (ج) $\frac{٢\sqrt{٢٧}}{٥}$ (د) $٢\sqrt{٩}$

٣٨) إذا كان الارتفاع الجانبي لهرم ثلاثي منتظم الوجوه يساوي $٣\sqrt{٥}$ سم

فإن مجموع مساحات أوجهه = سم^٢؟

(١) $\frac{٣\sqrt{٥٠}}{٣}$ (ب) $٣\sqrt{٢٥}$ (ج) $٣\sqrt{١٠٠}$ (د) $٣\sqrt{٥٠}$

٣٩) هرم رباعي قائم قاعدته على شكل معين طول ضلعه يساوي طول أحد قطري المعين يساوي ٦ سم

فإذا كان ارتفاع الهرم = ١٢ سم فإن حجم الهرم = سم^٣؟

(١) $٣\sqrt{٧٢}$ (ب) $٣\sqrt{١٦}$ (ج) ١٤٤ (د) ٧٢

٤٠) أ ب ح د أ ب ح د مكعب طول حرفه = ٦ سم فإن حجم الهرم أ ب ح د = سم^٣؟

(١) ٣٦ (ب) ٧٢ (ج) $٣\sqrt{٣٦}$ (د) $٣\sqrt{١٨}$

٤١) هرم رباعي منتظم مساحته الكلية = ٧٠ سم^٢ ومساحته الجانبية = ٤٥ سم^٢

فإن ارتفاع الهرم = سم.

(١) ٢.٥ (ب) ٥ (ج) $١٤\sqrt{٢}$ (د) ٤.٥

١ في الهرم الخماسي المنتظم :

- ١ ما عدد أوجهه الجانبية ؟
٢ ما عدد أوجهه الأوجه ؟
٣ ما عدد أحرفه الجانبية ؟
٤ ما عدد أحرفه ؟

٥ للهرم رأس واحدة بخلاف رؤوس القاعدة. ما عدد جميع رؤوس الهرم الخماسي ؟
هل تحقق إجابتك علاقة أويلر لأي مجسم قاعدته منطقة مضلعة ؟

٢ م ٢ ب ح د هرم رباعي منتظم طول ضلع قاعدته يساوي ١٠ سم ، وارتفاعه ١٢ سم.
أوجد ارتفاعه الجانبى.
« ١٣ سم »

٣ م ٢ ب ح د هرم رباعي منتظم ارتفاعه ٢٠ سم ، وارتفاعه الجانبى ٢٥ سم.
أوجد طول ضلع قاعدة الهرم.
« ٣٠ سم »

٤ م ٢ ب ح د هرم رباعي منتظم قاعدته المربع ٢ ب ح د فإذا كان ارتفاعه يساوي $4\sqrt{3}$ سم وطول حرفه الجانبى م $4 = 4\sqrt{5}$ سم احسب طول ضلع قاعدته.
« ٨ سم »

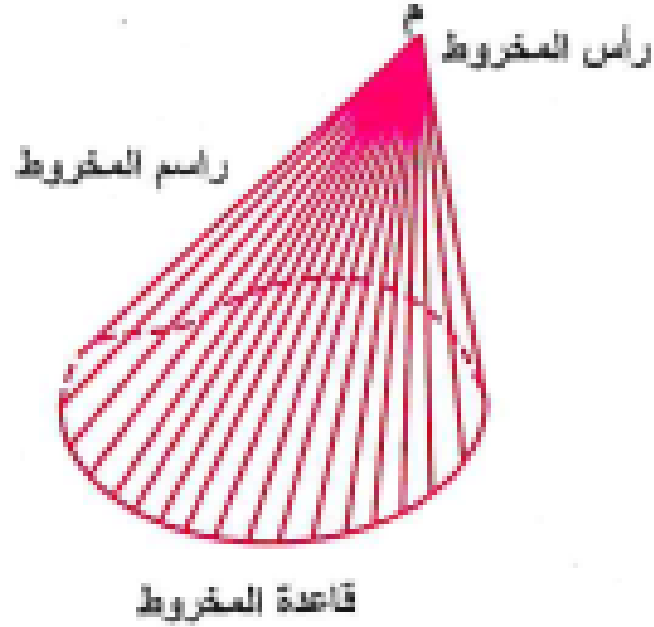
٥ م ٢ ب ح د هرم ثلاثى منتظم قاعدته Δ ٢ ب ح المتساوى الأضلاع الذى طول ضلعه ١٢ سم فإذا كان ارتفاع الهرم يساوي ٦ سم فأوجد طول حرفه الجانبى.
« $2\sqrt{21}$ سم »

٦ م ٢ ب ح د هرم ثلاثى منتظم قاعدته ٢ ب ح مثلث متساوى الأضلاع طول ضلعه ٣ سم فإذا كان طول حرفه الجانبى $= \sqrt{7}$ سم فأوجد ارتفاع الهرم.
« ٢ سم »

٧ م ٢ ب ح د هرم ثلاثى منتظم الوجوه طول حرفه ١٢ سم احسب ارتفاعه وارتفاعه الجانبى.
« $4\sqrt{6}$ سم ، $6\sqrt{3}$ سم »

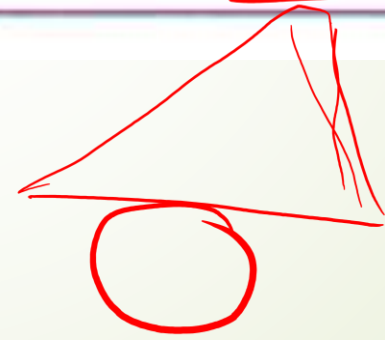
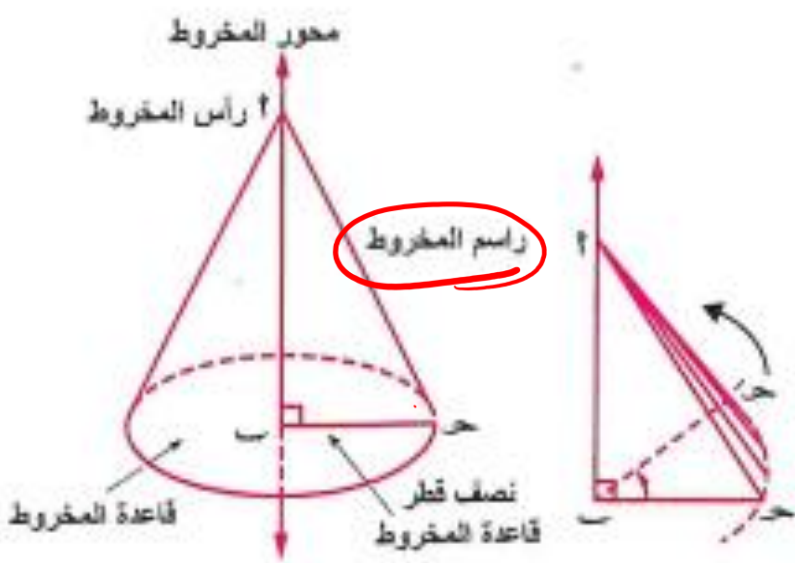
٨ هرم سداسى منتظم ارتفاعه ٨ سم وقاعدته مسدس منتظم محيطه $24\sqrt{3}$ سم
احسب طول حرفه وارتفاعه الجانبى.
« $4\sqrt{7}$ سم ، ١٠ سم »

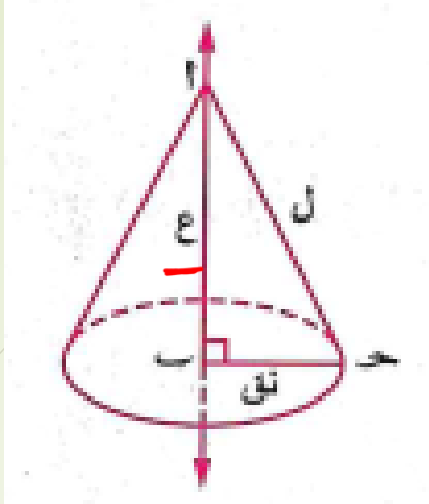
هو مجسم له قاعدة واحدة على شكل منحنى مغلق ورأس واحدة ،
ويتكون سطحه الجانبي من جميع القطع المستقيمة المرسومة من رأسه
إلى منحنى قاعدته والتي يعرف كل منها براسم المخروط.



المخروط الدائري القائم

هو الجسم الذي ينشأ من دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة كمحور.
أو هو الفراغ الذي ينشأ من طي قطاع دائري بحيث ينطبق نصفا قطريه كل على الآخر.



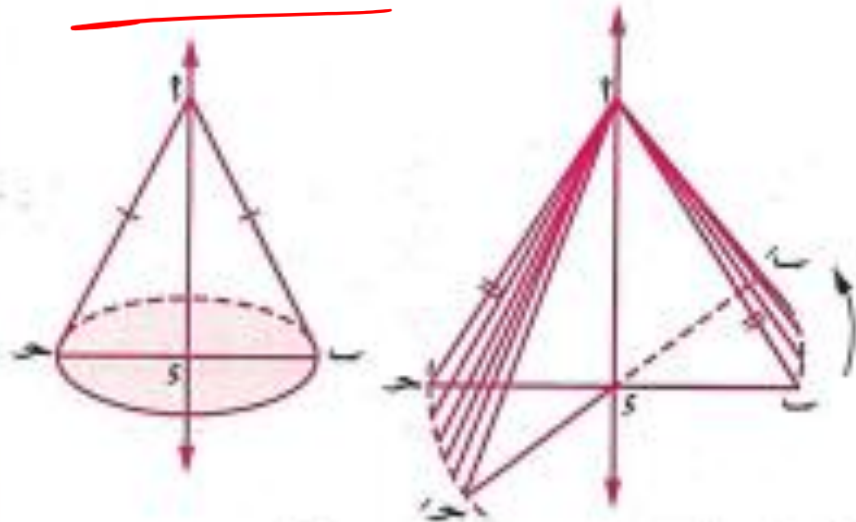


طول $\overline{أب} = ع$ وحدة طول ، وطول $\overline{أح} = ل$ وحدة طول

فإن : ارتفاع المخروط (ع) $= \sqrt{ل^2 - ب^2}$ ويكون $ع > ل$ دائماً

ملاحظة

من الممكن أن ينشأ المخروط الدائري القائم من دوران مثلث متساوي الساقين حول محور تماثله نصف دورة كاملة.



في الشكل المقابل :

إذا كان $\Delta أ ب ح$ متساوي الساقين فيه :

$أ ب = أ ح$ ، $\overleftrightarrow{أس}$ محور تماثل $\Delta أ ب ح$

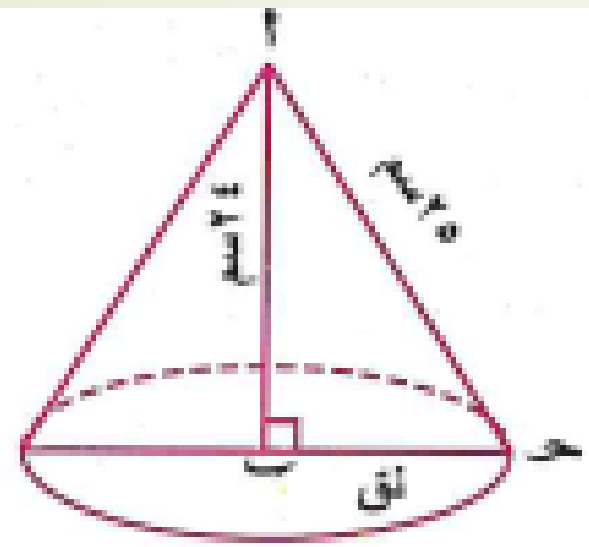
فإذا دار المثلث $أ ب ح$ حول $\overleftrightarrow{أس}$ نصف دورة

كاملة فإنه ينشأ مخروط دائري قائم قاعدته سطح الدائرة $س$ ورأسه $أ$ أو $ب$ أو $ح$ وارتفاعه طول $\overline{أس}$ ورأسه نقطة $أ$



مخروط دائري قائم طول راسمه ٢٥ سم وارتفاعه ٢٤ سم

أوجد محيط ومساحة قاعدة المخروط $(\frac{22}{7} = \pi)$



∴ $\vec{AB} \perp$ مستوى الدائرة ب

∴ $\angle AOB = 90^\circ$

∴ $OB = r = 7$ سم

∴ $\vec{AB} \perp \vec{BC}$

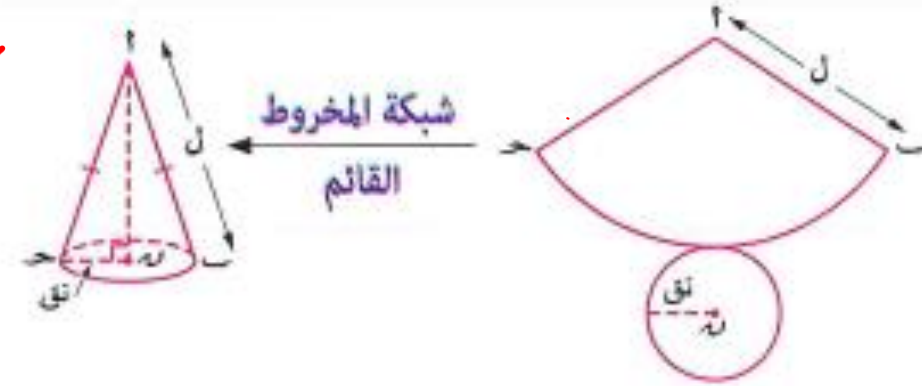
$$49 = 24^2 - 25^2 = r^2 - 25^2 = r^2 - 625$$

∴ نق (طول نصف قطر القاعدة) = 7 سم

$$\therefore \text{محيط القاعدة} = 2\pi r = 2 \times \frac{22}{7} \times 7 = 44 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة سطح القاعدة} = \pi r^2 = \frac{22}{7} \times 49 = 154 \text{ سم}^2$$

شبكة المخروط القائم



ملاحظات هامة

1 إذا كان $l < 2\pi r$ تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

وتكون $0 < \theta < 180^\circ$

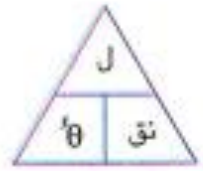
القطاع الدائري هو جزء من سطح دائرة محدود بنصفي قطرين وقوس من الدائرة.

• مساحة القطاع = $\frac{1}{2} l r$ حيث l طول قوس القطاع.

• مساحة القطاع = $\frac{1}{2} r^2 \theta$ حيث θ قياس زاوية القطاع بالتقدير الدائري.

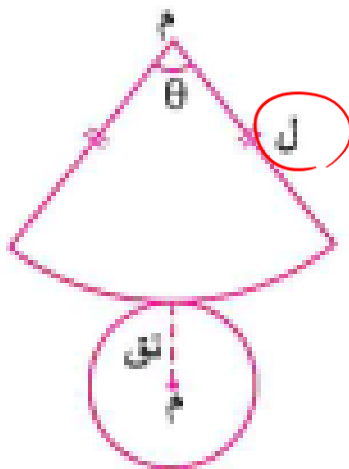
• مساحة القطاع = $\frac{\theta}{360} \times \pi r^2$ حيث θ القياس الستيني لزاوية القطاع.

• محيط القطاع = $2r + l$ وحدة طول.

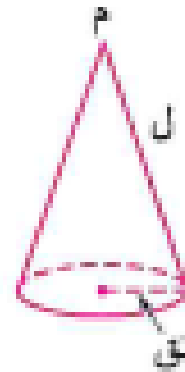


$$\frac{\pi}{180} \times \theta = \frac{l}{r}$$

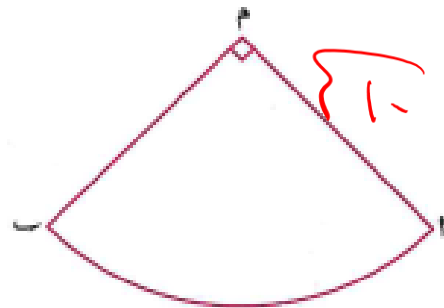
$$\frac{180}{\pi} \times \frac{l}{r} = \theta$$



شبكة المخروط



في الشكل المقابل :



قطعة من الورق على شكل قطاع دائري مساحته 20π سم²

وقياس زاويته المركزية يساوي 90°

طويت بحيث تلامس \overline{AM} ، \overline{BM} وتحولت إلى عبوة ورقية

على شكل مخروط فأوجد ارتفاع العبوة لأقرب جزء من عشرة.

الحل

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{1}{4} \theta^2 \text{نق}$$

$$\therefore 20\pi = \frac{1}{4} \theta^2 \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4}$$

$$\therefore \text{نق} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{مساحة القطاع} = \frac{1}{4} \text{ل نق}$$

$$\therefore \text{ل} = 20\pi \text{ سم}$$

$$\therefore \text{محيط الدائرة} = 20\pi \text{ سم}$$

$$\therefore \Delta 4 \text{ م } 4 \text{ م فيه } \theta = (4 \text{ م } 4 \text{ م}) = 90^\circ$$

$$\therefore 4 \text{ م} = \sqrt{(20\pi)^2 - (10)^2} = \sqrt{(4\pi)^2 - (4 \text{ م})^2} = 9.7 \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ارتفاع العبوة} = 9.7 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \theta^2 \text{نق} = 20\pi$$

$$\therefore \text{نق} = 10$$

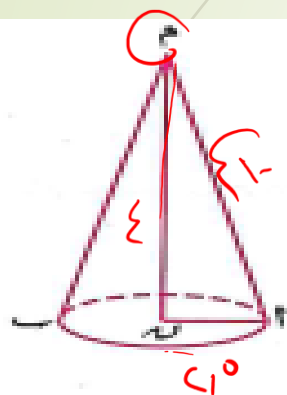
$$\therefore \text{م} = 10 \text{ سم}$$

$$\therefore \frac{1}{4} \text{ل} \times 10 = 20\pi$$

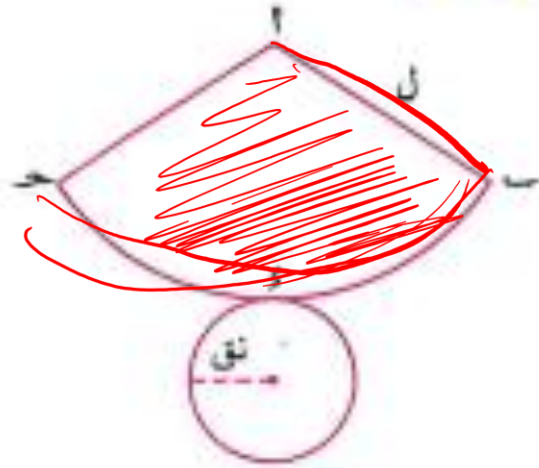
$$\therefore \text{طول} \overline{AB} = 20\pi \text{ سم}$$

$$\therefore 20\pi = \text{نق} \times \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{4}$$

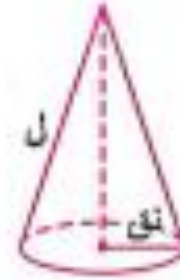
$$\therefore \text{م} = 10 \text{ سم} ، \text{م} = 10 \text{ سم} ، \theta = 90^\circ$$



استنتاج المساحة الجانبية والكلية للمخروط القائم



شبكة المخروط



من شبكة المخروط القائم نستنتج أن :

المساحة الجانبية للمخروط القائم = مساحة القطاع $ح$ $ل$ $\times \frac{1}{4} =$ طول $ح$ \times $ل$

$= \frac{1}{4} \times$ محيط قاعدة المخروط \times $ل$

$= \frac{1}{4} \times 2\pi \text{ نق} \times ل = \pi ل \text{ نق}$

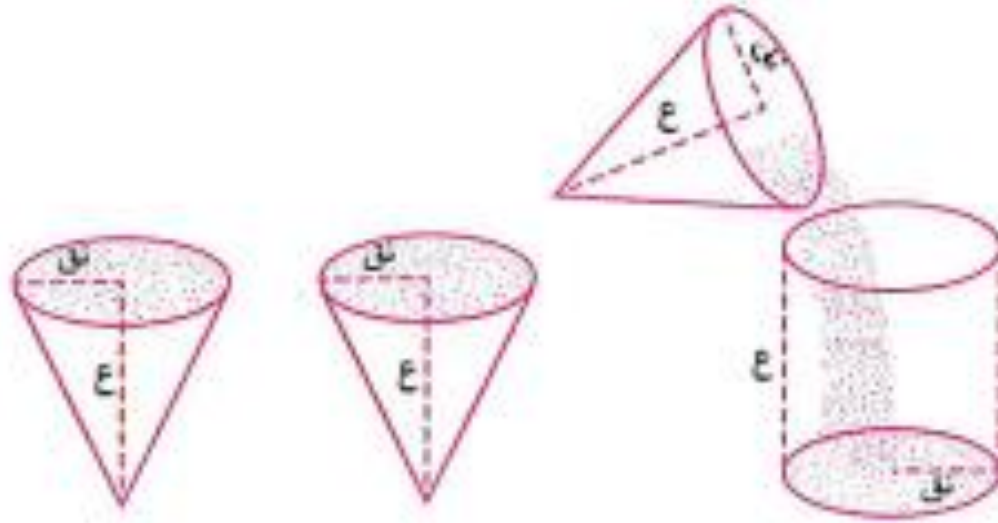
∴ المساحة الجانبية للمخروط القائم = $\pi ل \text{ نق}$

∴ المساحة الكلية للمخروط القائم = المساحة الجانبية له + مساحة قاعدته = $\pi ل \text{ نق} + \pi \text{ نق}^2$

∴ المساحة الكلية للمخروط القائم = $\pi \text{ نق} (ل + \text{نق})$

استنتاج حجم المخروط القائم

تجربة عملية



* أحضر وعاء مفرغ على شكل أسطوانة دائرية قائمة ووعاء آخر على شكل مخروط دائري قائم بحيث تكون قواعدهم متطابقة ولهما نفس الارتفاع كما بالشكل المقابل.

* املا الوعاء المخروطي بحبات الأرز أو الرمل ثم قم بتفريغ ما به في الأسطوانة.

* لاحظ أنه بتكرار هذه العملية ثلاث مرات فإن الأسطوانة سوف تمتلئ تماماً بحبات الأرز أو الرمل.

وهذا يعني أن حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ حجم الأسطوانة المتحدة معه في القاعدة والارتفاع

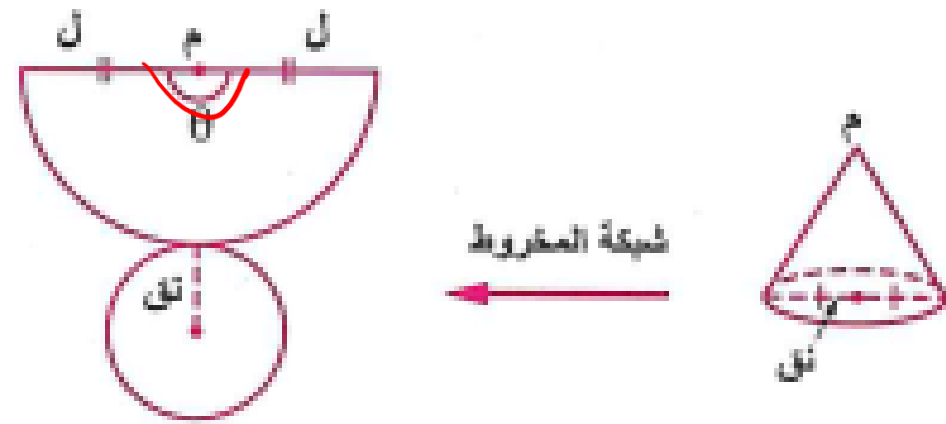
∴ ، حجم الأسطوانة = مساحة القاعدة × الارتفاع

∴ حجم المخروط القائم = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة × الارتفاع = $\frac{1}{3} \pi ر^2 ع$

٢ إذا كان $l = 2$ نق تكون شبكة المخروط

كما هو موضح بالشكل

وتكون $\theta = 180^\circ$



٣ إذا كان $l > 2$ نق تكون شبكة المخروط

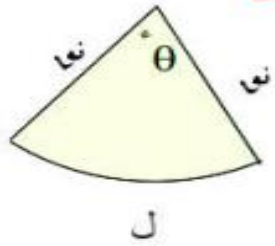
كما هو موضح بالشكل

وتكون $180^\circ > \theta > 36^\circ$



ملحوظة هامة

قوانين مساحة القطاع الدائري



$$\frac{1}{2} l r \quad \checkmark *$$

$$\frac{1}{2} r^2 \theta = \quad \checkmark *$$

$$\frac{\pi r^2 \theta}{360} = \quad \checkmark *$$

$$\text{محيط القطاع} = l + 2r \quad \checkmark *$$

$$\frac{l}{r} = \theta$$



للتحويل من مخروط إلى قطاع دائري

* نصف قطر دائرة القطاع

هو طول راسم المخروط "ل"

* طول قوس القطاع

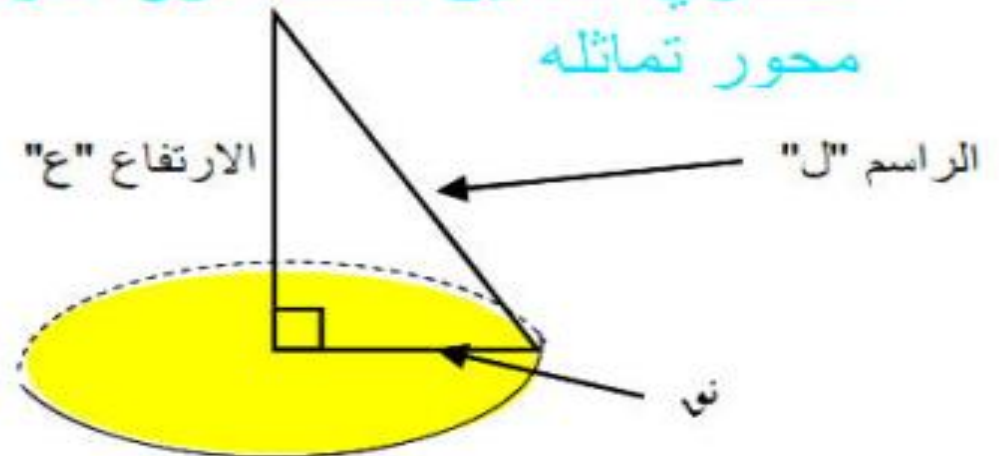
هو محيط دائرة المخروط " $2\pi r$ "

المخروط الدائري القائم

المجسم الناشئ عن دوران مثلث قائم الزاوية دورة كاملة حول أحد ضلعي القائمة

المجسم الناتج عن طي قطاع دائري

المجسم الناتج عن دوران مثلث متساوي الساقين نصف دورة حول محور تماثله



المساحة الجانبية-الكلية والحجم للمخروط الدائري القائم

(١) المساحة الجانبية = $\pi l n$

$\frac{1}{3}$ محيط القاعدة \times طول الراس = $\frac{1}{3} \pi r^2 n$ نول

(٢) المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مساحة القاعدة

$$\pi l n + \pi r^2 n =$$

$\pi n (l + r)$

(٣) حجم المخروط = $\frac{1}{3}$ مساحة القاعدة \times الارتفاع

$$= \frac{1}{3} \pi r^2 n$$

$$= \frac{1}{3} \text{ حجم الأسطوانة}$$

$$PM \perp MB \quad \therefore$$

$$\therefore L = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \text{ سم}$$

$$\text{نق} = 6 \text{ سم} \quad \text{ع} = 8 \text{ سم} \quad \text{ل} = 10 \text{ سم}$$

$$(P) \text{ المساحة الجانبية} = \pi \text{ نق ل}$$

$$= \pi \times 6 \times 10 = 60\pi \text{ سم}^2$$

$$(B) \text{ المساحة الكلية} = \pi \text{ نق ل} + \pi \text{ نق}^2$$

$$= \pi \times 6^2 + \pi \times 60 = 96\pi \text{ سم}^2$$

$$(J) \text{ الحجم} = \frac{1}{3} \pi \text{ نق}^2 \text{ ع}$$

$$= \frac{1}{3} \pi \times 6^2 \times 8 = 96\pi \text{ سم}^3$$

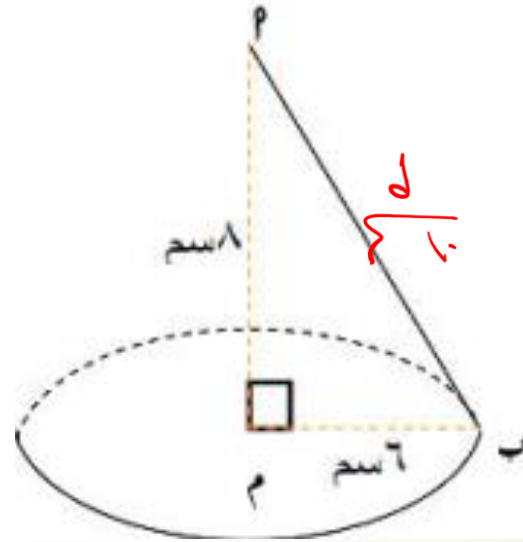
مثال (٤) مخروط دائري قائم طول قطره قاعدته

٢ سم وارتفاعه = ٨ سم أوجد

(P) المساحة الجانبية

(B) المساحة الكلية

(J) الحجم



الحل

مثال (٥) مخروط دائري قائم محيط قاعدته

٤ سم وارتفاعه ٢٥ سم

أوجد

(١) مساحته الجانبية

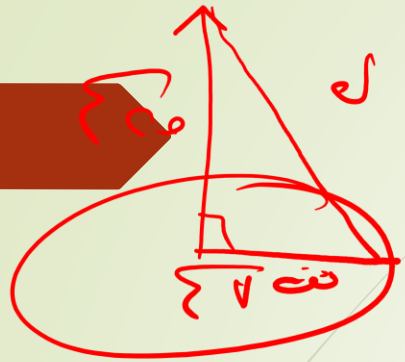
(٢) مساحته الكلية

(٣) حجمه

$$= \sqrt{25 + 4} \times 4$$

$$\sqrt{29} \times 4 \times \frac{\pi}{2} + \pi \times 2 \times 2$$

$$\frac{1}{3} \times \pi \times 2^2 \times 25$$



$$\frac{25}{2} = \text{ارتفاع}$$

$$\frac{4}{2} = \text{نصف قطر}$$

$$\frac{4}{2} \times \frac{25}{2}$$

$$\boxed{2 = \text{نصف قطر}}$$

مثال (٦) أوجد طول نصف قطر مخروط دائري قائم مساحته الكلية ٦١٦π سم^٢ وطول راسمه ٣٠ سم ل

المساحة الكلية = π (ل + ن) (نو)

$$\pi \cdot 616 = \pi (ل + ن) \cdot نو$$

$$616 = (ل + 30) نو$$

$$616 = نو^2 + 30نو$$

$$نو^2 + 30نو - 616 = 0$$

$$(نو - 14) (نو + 44) = 0$$

إما نو = 14 سم أو نو = 44 سم فرفض

∴ طول نصف القطر = 14 سم

لاحظ أن

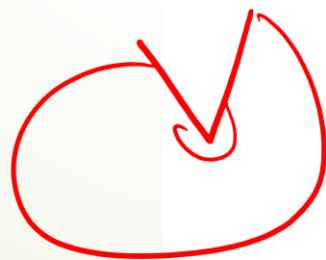
(١) إذا كان $l < 2n$

تكون $0 < \theta < 180^\circ$



(٢) $l = 2n$

تكون $\theta = 180^\circ$



(٣) $l > 2n$

تكون $180^\circ < \theta < 360^\circ$

مثال (٨) قطاع دائري ٢٢ ب طول نصف

دائرتة ٨٨ سم وقياس زاويتة المركزية ٦٠°

طوي ولصق نصف قطر ه ليكون أكبر مساحة
جانبيه لمخروط قائم أوجد حجمه

المخروط

طول الراسم ل = ١٨ سم

$\pi^2 = \pi^6$

$٦ = ٢$

$\therefore ٣ = ٢$

القطاع



نق = ١٨ سم

طول القوس = $\theta \times \text{نق}$

$١٨ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times ٦٠ =$

$\therefore \pi^6 =$

صلي الراسم = طول الراسم

$\sqrt{٣} - \sqrt{١٨} = \sqrt{٣} - ٣\sqrt{٣}$

$٣\sqrt{٣} =$

$\therefore \text{الحجم} = \frac{1}{3} \pi \times ٣^2 \times ٣ = \frac{1}{3} \pi \times ٢٧$

$= ٩\pi$

$\frac{\pi}{١٨٠} \times ٦٠ = \frac{\pi}{3}$
 $\frac{\pi}{3} \times ١٨ = ٦\pi$

مثال (٩) طويت قطعة من الورق المقوى
على شكل قطاع دائري طول نصف قطر

دائره ٣٦ سم وقياس زاويته 102° لتصنع
مخروطاً دائرياً قائماً. أوجد ارتفاع المخروط
وحجمه

المخروط

طول הראسم ل = ٣٦ سم

محيط دائرة المخروط

$$\pi \times ٢١ = \pi \times ٤٢$$

$$٢١ = \frac{٤٢}{٢} = ٢١ \text{ سم}$$

$$\therefore \text{ع} = \sqrt{٣٦^2 - ٢١^2} = \sqrt{٩٠٠ - ٤٤١} = \sqrt{٤٥٩}$$

$$= ٢١.٤٢٣ \text{ سم}$$

$$\text{الحجم} = \frac{١}{٣} \pi \times ٢١^2 \times \text{ع}$$

$$= \frac{١}{٣} \pi \times ٢١^2 \times ٢١.٤٢٣ = ٦٩٢٧ \text{ سم}^٣$$

القطاع

طول نصف

القطر = ٣٦ سم

طول القوس = $\theta \times \text{نق}$

$$= \text{س}^\circ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times \text{نق}$$

$$= ٣٦ \times \frac{\pi}{١٨٠} \times ٢١٠ =$$

$$= \pi \times ٤٢$$

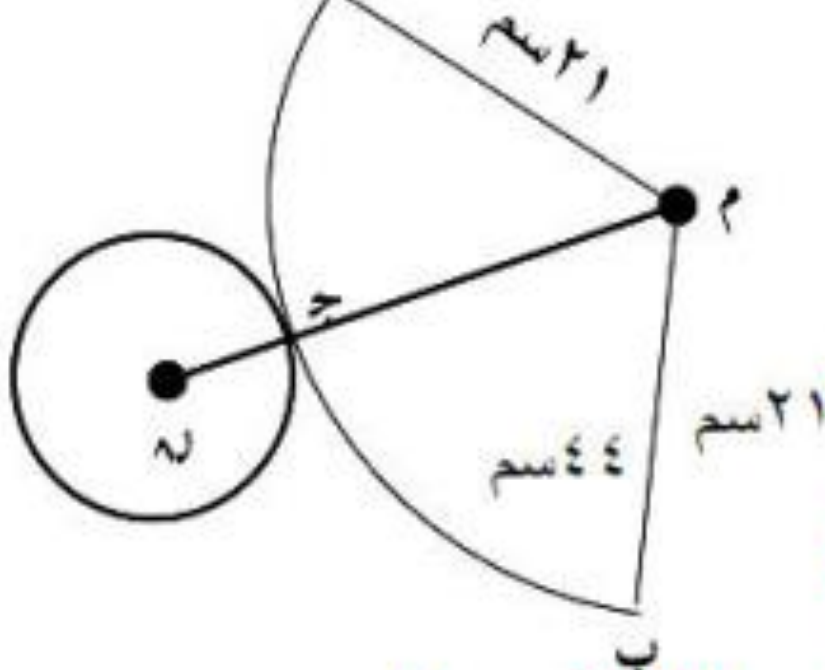
مثال (١٠) أيهما أكبر حجماً؟ مخروط قائم

طول نصف قطر قاعدته ٥ سم وارتفاعه

٢٠ سم ، أم هرم رباعي منتظم ارتفاعه

٤ سم ومحيط قاعدته ٨ سم

مثال (١)



في الشكل المقابل

أوجد - الارتفاع

المساحة الجانبية - الكلية - الحجم

المخروط

$$٤٤ = \pi \times ٢ \times ٢١$$

$$٤٤ = ٢ \times \frac{٢٢}{٧} \times ٢١$$

$$\therefore ٧ = ٢١$$

القطاع

$$٢١ = ٢١$$

$$٤٤ = ٤٤$$

$$ع = \sqrt{21^2 - 7^2} = \sqrt{400} = 20 \text{ سم}$$

المساحة الجانبية = $\pi \times ل \times نو$

$$462 \text{ سم}^2 = 7 \times 21 \times \frac{22}{7} =$$

المساحة الكلية = $\pi \times نو^2 + 462$

$$616 \text{ سم}^2 = 7^2 \times \frac{22}{7} + 462 =$$

الحجم = $\frac{1}{3} \times \pi \times نو^2 \times ع$

$$= \frac{1}{3} \times \pi \times 20^2 \times 20 = \frac{1}{3} \times 3.14 \times 400 \times 20 = 8368 \text{ سم}^3$$

المخروط

$$ل = 21 \text{ سم} \quad \pi \times نو^2 = 44$$

$$44 = نو \times \frac{22}{7} \times 2$$

$$\therefore نو = 7 \text{ سم}$$

القطاع

$$نو = 21$$

$$ل = 44 \text{ سم}$$

٨ أوجد الدالة العكسية

$$d(s) = 3s - 1$$

$$y = 3x - 1$$

$$y + 1 = 3x$$

$$\frac{y + 1}{3} = x$$

$$x = \frac{y + 1}{3}$$

$$x^{-1} = \frac{y + 1}{3}$$

الدالة الأسية وتطبيقاتها

مهم جداً جداً

شرط الدالة الأسية

لو $a = (س) م$

لو $٢ = ٢٠٠٠٠$

حيث $م \rightarrow$ الأساس \exists ح $\{ ١ \}$

الأساس عدد موجب لا يساوي الواحد

لو العدد = الأس
الأساس

العدد $٩ = ٣^٢$

ص = لو س
م \rightarrow الأساس

فاكر شرط الأساس للدالة الأسية:

الشروط

١ العدد اللي امام اللوغاريتم

س < ٠ يعني س \exists ح +

٢ الأساس اللي تحت الواو

\leftarrow م \exists ح $\{ ١ \}$

يعني < ٠ وكذلك $\neq ١$

مثال ١ : أوجد مجال كلاً من الدوال التالية :

$$(١) \text{ د (س) = لو } (٤ - \text{س})$$

الحل

هنا شرط واحد

$$٤ - \text{س} < ٤$$

$$[-\infty , ٤]$$

$$٤ - \text{س} < ٠$$

$$\text{س} > ٤$$

المجال

$$(٢) \text{ د (س) = لو } (٥ - \text{س})$$

$$٥ - \text{س} < ٠$$

$$\text{س} > ٥$$

$$\text{م. ج. }] ٥ , \infty [$$

$$(٢) \text{ د (س) = لو } (٥ - \text{س}) \quad \underline{\text{حل أنت}}$$

الحل

مثال ١ :

أوجد مجال كلاً من الدوال التالية : (١) د (س) = لو ٥ حل أنت

١ لكلا → س-٢

(٢) د (س) = لو ٣
٢-٢

عندي شرطين

$$\left. \begin{aligned} 2 - s < 0 & \quad -s < 2 \\ s - 2 & \neq 1 \end{aligned} \right\}$$

، $s - 1 \neq 2$

$s \neq 1$

$s \neq 1$

∴ المجال [-∞ ، ٢] - { ١ }

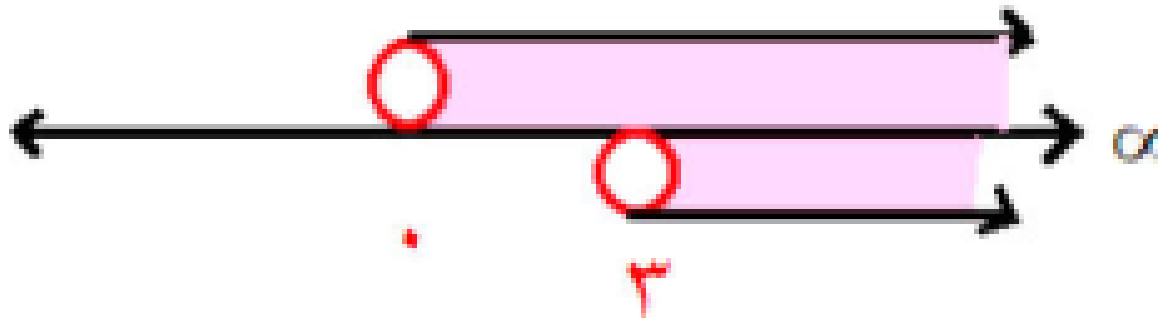
$$\left. \begin{aligned} s < 0 & \quad s - 2 < 0 \\ s - 2 & \neq 1 \end{aligned} \right\}$$

$s + 1 \neq 2$

ع. ٢ = $s \in [-\infty ، 2] - \{ 1 \}$

(ه) د (س) = لو س_۳ س

الحل



∴ المجال [۳ ، ∞) - { ۰ }

عندي ۳ شروط

$$\left. \begin{array}{l} 0 < s \\ s - 3 < 0 \\ s - 3 \neq 1 \\ s + 1 \neq 3 \\ s \neq 4 \end{array} \right\}$$

حل يا دكتور

(ه) د (س) = لو س_۳ س

عندي ۳ شروط

$$\left. \begin{array}{l} 0 < s \\ s - 3 < 0 \\ s - 3 \neq 1 \\ s + 1 \neq 3 \\ s \neq 4 \end{array} \right\}$$

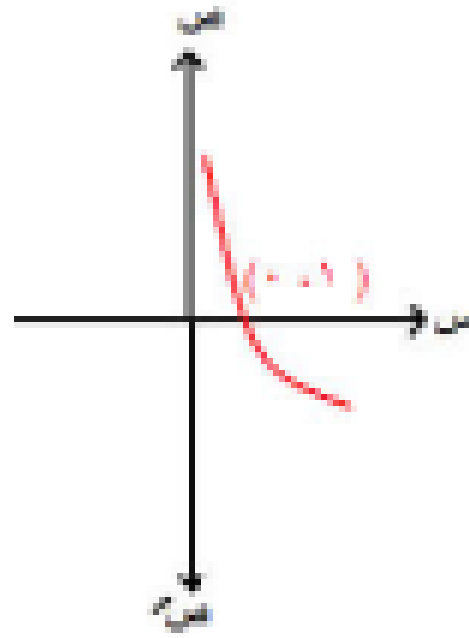
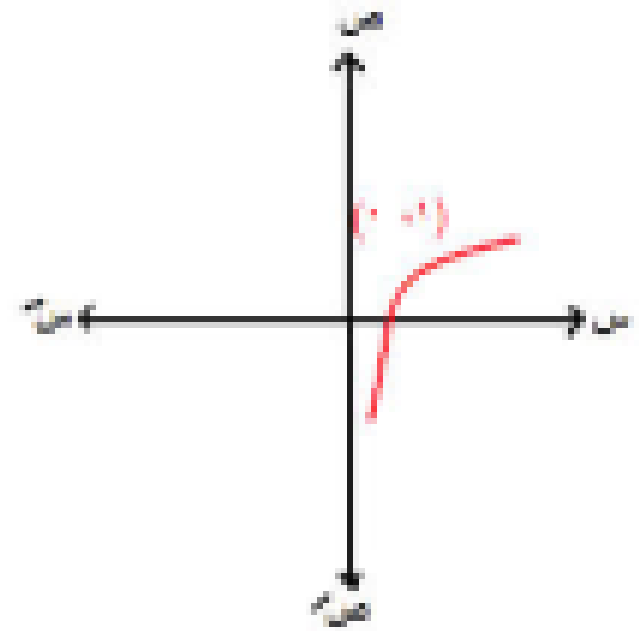


∴ المجال [۳ ، ∞) - { ۰ }

د (م) = لو م س

$$1 < p$$

$$1 > p > 0$$



(١) المجال ح + ، المدي = ح

(٢) تزايدية عندما $1 < p$ او تناقصية $0 < p < 1$

(٣) جميع منحنيات الدوال اللوغاريتمية تمر

بالنقطة (١, ٠) نقطة الدالة العكسية

(٤) الدوال اللوغاريتمية أحادية

لو العدد = الأس
الأساس

أولاً : التحويل من الصورة الأسية
إلى الصورة اللوغاريتمية

ثانياً: التحويل من اللوغاريتمات للأسس

$$125 = 5^3$$

$$100 = 10^2$$

$$16 = 2^4$$

$$125 = 5^3$$

$$100 = 10^2$$

$$16 = 2^4$$

$$2 = 2^1 \rightarrow \text{الصورة} \quad \text{لو } 2 = 2^1 \quad \text{لو } 8 = 2^3 \quad \text{لو } 8 = 2^3$$

$$2 = 2^1 \quad \text{لو } 25 = 5^2 \quad \text{لو } 25 = 5^2$$

$$4 = 2^2 \quad \text{لو } 81 = 3^4 \quad \text{لو } 81 = 3^4$$

$$5 = 5^1 \quad \text{لو } 5 = 5^1 \quad \text{لو } 5 = 5^1$$

اللوغاريتم المعتاد لوس

هو لوغاريتم أساسه 10 غير مكتوبة

مثال : أوجد قيمة س :

٢

لور $81 = \sqrt[3]{s}$ = س

٣

لور $s = \frac{1}{3}$ = ٣

الحل

الحل

الحل

١

لور $s = \frac{1}{4}$ = ٤

لور $81 = \sqrt[3]{s}$ = س مباشرة باستخدام الآلة

لور $81 = \sqrt[3]{\frac{9}{4}} = 2.25$

لور $s = \frac{1}{16}$ = ٤ = س = ٤

لور $s = \frac{1}{3}$ = ٣ = ٨

تمارین اوجد قيما

الحل

لو ۸ = ۶ = ۱۱/۱۱
 لو ۸ = ۶ = ۱۱/۱۱
 لو ۸ = ۶ = ۱۱/۱۱

لو ۱۶ = ۴

لو ۸۱ = ۳

لو ۱۲۸ = ۷

لو ۲۷ = ۳

لو (لو ۳) = ۱

لو ۸ = ۳ = ۲ = ۱
 لو ۸ = ۳ = ۲ = ۱
 لو ۸ = ۳ = ۲ = ۱

لو ۲۷ = ۳

لو ۲۷ = ۳ = ۳ = ۳

لو ۱۲۸ = ۷ = ۲ = ۱

لو ۹ = ۳

شوية تمارين زي الفل

حل المعادلات الآتية في ح :

١ لو (لو س) = ١

الحل

لو س = ١

س = ١
م.ح = { ١ }

٢ لو لو لو (س + ١) = ٠

الحل

لو لو (س + ١) = ٠

لو (س + ١) = ٠

(س + ١) = ٠

س = ١ - ١ = ٠

$$3 \quad \text{لو } 5x = 2 \text{ سے}$$

الحل

$$5x = 2 \text{ سے}$$

$$5x - 5x = 2 - 5x$$

$$0 = (2 - 5x) \text{ سے}$$

$$0 = 2 - 5x$$

لا تطبق

$$\therefore \text{مجموع} = \{0\}$$

$$0 = 2 - 5x$$

$$5x = 2 \text{ سے تطبق}$$

$$4 \quad \text{لو } 5x + 1 = 6$$

الحل

$$5x + 1 = 6$$

$$\therefore 5x + 1 = 6$$

$$5x + 1 = 6$$

$$5x = 6 - 1$$

$$5x = 5$$

$$x = \frac{5}{5} = 1$$

$$\therefore \text{مجموع} = \{1, 5, 2\}$$

$$5x + 1 = 6$$

$$5x = 6 - 1$$

$$x = \frac{5}{5} = 1$$

لو لو (آمن - 1) = 1
2 3

الحل

لو (آمن - 1) = 1
2

آمن - 1 = 1
2

آمن = 1 + 1
2

آمن = 1 + 1
2

آمن = 2
2

م.ح = {2}

آمن = 9

حل انت

$$\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$

~~$$\frac{2}{1} = \frac{\sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}}$$~~

$$9 - \sqrt{2} = 0$$

$$= 9 + \sqrt{2} - 0$$

$$= (9 - \sqrt{2})$$

$$= 9 - \sqrt{2}$$

$$\underline{\underline{9 - \sqrt{2} = 2.8}}$$

$$7 = \text{لو 2 سے}$$

$$11 = \text{لو 2 سے}$$

$$15 = \text{لو 2 سے}$$

$$20 = \text{لو 2 سے}$$

$$27 = \text{لو 2 سے}$$

$$7 = \left(\frac{2 \text{ سے } 2}{2 - 2} \right) \text{ لو 2 سے}$$

1

2

3

4

5

6

الدرس الأخير
بعض خواص اللوغاريتمات

(١) الخاصية الأولى لو $p = 1$

لو $5 = 1$ لو $9 = 1$ لو $10 = 1$

(٢) الخاصية الثانية لو $1 = \text{صفر}$

لأن (أي عدد) صفر = 1
لذلك لو 1 = صفر لأي عدد

لو $0 = 1$ لو $0 = 1$

إذا كان لو $0 =$ فإن $1 =$

إذا كان لو $(-2) = 0$ فإن $1 = 2 -$

ب.س = 2

(٣) الخاصية الثالثة لو $p = n$ لو p

الأس يطلع براه معامل و العكس صحيح

لو $25 = 2$ لو $5 = 2$ لو $2 = 1 \times 2 = 5$

لو $100 = 2$ لو $10 = 2$ لو $2 = 1 \times 2 = 10$

(٤) الخاصية الرابعة لو $p +$ لو $q =$ لو $p \times q$

لو $35 = 7$ لو $5 = 7$ لو $35 = 7 + 5$

لو $12 = 4 + 3$ لو $12 = 4 + 3$

(٥) الخاصية الخامسة لوس - لوص = لو $\frac{ص}{م}$

يراعي نفس ملاحظات الخاصية (٤)

$$\text{لوس} - \text{لوص} = \text{لو} \frac{ص}{م}$$

$$\text{لو} ٢٥ - \text{لو} ٥ = \text{لو} \frac{٢٥}{٥}$$

$$\text{لو} ١٠٠ - \text{لو} ١٠ = \text{لو} \frac{١٠٠}{١٠} = ١$$

ولكن : لو (ص - م) \neq لو $\frac{ص}{م}$

ملاحظات علي الخاصية "٤"

لا بد أن يكون نفس الأساس
ولا بد أن تكون + بين اللوغاريتمات

ولاحظ الفرق بين

$$\text{لوس} + \text{لوص} = \text{لو} \frac{ص}{م}$$

ولكن لو (ص + م) \neq لو $\frac{ص}{م}$

$$\text{لو} ٥ + ٢ \neq \text{لو} ٧$$

$$\text{لو} ٥ + \text{لو} ٢ = \text{لو} ١٠$$

$$\frac{\text{لوس}}{\text{لوص}} = \text{الخاصية السادسة لوس ص}$$

$$\frac{1}{\frac{\text{لوص}}{\text{س}}} = \text{(7) المعكوس الضربي لوس ص}$$

فمثلاً: لو $\frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$

لو $\frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$

فمثلاً: لو $\frac{25}{9} = 25$

لو $7 = \frac{7}{8}$

لو $\frac{1}{\frac{1}{ص}} = \text{لوس ص}$

لو $\frac{1}{\frac{1}{ص}} = \text{لوس ص}$

الفكرة الأولى مسائل مباشرة

بدون استخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة :

$$10 \frac{1}{3} - 6 \frac{2}{3} + 15 \frac{1}{3}$$

الحل

نتأكد إن مفيش معاملات (هندخلها جوه)

والأساسات موحدة

ناخد لو $\frac{10}{3}$ الموجب فوق و السالب تحت مضروبين

$$\frac{90}{10 \cdot 3} = \frac{6 \times 15}{10 \cdot 3}$$

$$2 = 9 \frac{1}{3} = 2 \frac{2}{3}$$

٢

$$100 \frac{1}{5} - 2 \frac{2}{5} + 18 \frac{3}{5} = 36 \frac{4}{5}$$

الحل

$$100 \frac{1}{5} - 2 \frac{2}{5} + 18 \frac{3}{5} = 36 \frac{4}{5}$$

$$100 \frac{1}{5} = \frac{21 \times 100}{18 \times 8}$$

$$100 \frac{1}{5} = 2 \frac{2}{5} = 2 \frac{2}{5} = 2$$

$$\frac{5}{243} + \frac{5}{36} - \frac{10}{2} + \frac{3}{5} \quad \text{٢٢}$$

$$3 \text{ لو}^3 + 5 \text{ لو}^2 + 6 \text{ لو} - 9 \text{ لو} + 2, \quad \text{٣}$$

الحل

$$\begin{aligned} & \frac{5}{243} + \frac{5}{36} - \frac{10}{2} + \frac{3}{5} \\ &= \frac{\frac{5}{243} \times 2 \left(\frac{10}{2} \right) \times \frac{3}{5}}{\frac{36}{36}} \text{ لو} \\ & 1 = \frac{36 \times 5 \times 10 \times 10 \times 3}{5 \times 243 \times 2 \times 2 \times 5} \text{ لو} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{لو}^3 + 5 \text{ لو}^2 + 6 \text{ لو} - 9 \text{ لو} + 2 \\ & \frac{.2 \times 36 \times 125}{9} \text{ لو} \\ & 2 = 100 \text{ لو} \end{aligned}$$

$$2 \frac{لو}{3} \times 9 \frac{لو}{11} \times 11 \frac{لو}{7} \times 7 \frac{لو}{2}$$

6

$$\frac{32 \frac{لو}{3} - 243 \frac{لو}{4}}{8 \frac{لو}{3} - 27 \frac{لو}{2}}$$

5

$$\frac{2 \frac{لو}{3}}{3 \frac{لو}{2}} \times \frac{9 \frac{لو}{11}}{11 \frac{لو}{7}} \times \frac{11 \frac{لو}{7}}{7 \frac{لو}{2}} \times \frac{7 \frac{لو}{2}}{2 \frac{لو}{3}}$$

$$2 = \frac{2 \frac{لو}{3}}{3 \frac{لو}{2}} = \frac{2 \frac{لو}{3}}{3 \frac{لو}{2}} = \frac{9 \frac{لو}{7}}{7 \frac{لو}{2}}$$

$$\frac{2 \frac{لو}{3} - 3 \frac{لو}{2}}{2 \frac{لو}{3} - 3 \frac{لو}{2}} = \frac{2 \frac{لو}{3} - 3 \frac{لو}{2}}{2 \frac{لو}{3} - 3 \frac{لو}{2}}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{(2 \frac{لو}{3} - 3 \frac{لو}{2}) 5}{(2 \frac{لو}{3} - 3 \frac{لو}{2}) 3}$$

$$7 \quad \begin{array}{c} \text{لو لو لو} \\ 4 \\ 2 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

$$8 \quad 1 + \text{لو} - 3 - \text{لو} - 2 - \text{لو} = 10$$

$$9 \quad \begin{array}{c} \text{لو س} + \text{لو ص} \\ \text{س ص} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \text{لو لو لو} = \text{لو لو لو} \\ 4 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \quad 2 \quad 2 \quad 4 \end{array}$$

$$\text{لو} + 10 - \text{لو} - 3 - \text{لو} - 2 - \text{لو} = 10$$

$$\text{لو} = \frac{3 \times 10}{10 \times 2} = 1 = \text{صفر}$$

$$\text{لو} = 1 = \text{صفر}$$

المقدار لو من ص = 1
س ص

" من خواص اللوغاريتمات "

$$\frac{1}{\frac{1}{9} \times 12} + \frac{1}{\frac{1}{8} \times 12} + \frac{1}{\frac{1}{2} \times 12} \quad 11$$

$$\frac{1}{\frac{1}{9} \times 12} + \frac{1}{\frac{1}{8} \times 12} + \frac{1}{\frac{1}{2} \times 12} \quad 10$$

من خاصية المعكوس الضربي

$$\frac{1}{\frac{1}{9} \times 12} + \frac{1}{\frac{1}{8} \times 12} + \frac{1}{\frac{1}{2} \times 12}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{9 \times 8 \times 2} \times 12$$

$$\frac{1}{12} = \frac{1}{12} \times 12 = 1$$

$$1 = \frac{1}{\frac{1}{9} \times 12} = \frac{1}{\frac{1}{8} \times 12} = \frac{1}{\frac{1}{2} \times 12}$$

١٢ $\text{لو (جنا } \theta) + \text{لو (قا } \theta) = \dots$

حيث $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\text{لو جتا } \theta \times \text{لو قا } \theta = \text{لو } 1 = \text{لو حـ } \theta$$

النوع الثاني باستخدام الحاسبة

باستخدام الحاسبة أوجد لأقرب رقمين عشريين قيمة s في المعادلات الآتية التالية :

$$1 \quad s = 17$$

بأخذ لو للطرفين

$$\log s = \log 17$$

$$s = 10^{\log 17}$$

$$s = \frac{17 \log 10}{\log 10} = 17$$

$$s = 17$$

$$2 \quad s = 17$$

بأخذ لو للطرفين

$$\log s = \log 17$$

$$(s - 1) \log 10 = \log 17$$

$$s - 1 = \frac{\log 17}{\log 10}$$

$$s = 1 + \frac{\log 17}{\log 10}$$

$$s = 2.11$$

$$3 \quad 5س + 1 = 9س$$

بأخذ لو للطرفين

$$لو 5س + 1 = لو 9س$$

$$9س (1 + س) = 5س لو 9$$

$$9س لو 5 + 5س لو 9 = 9س لو 9$$

$$9س لو 5 - 5س لو 9 = 9س لو 5$$

$$9س [لو 5 - لو 9] = 9س لو 5$$

$$س = \frac{لو 5}{9س لو 5 - لو 9}$$

$$\therefore س \leq 2,74$$

$$4 \quad 7س + 1 = 3س - 2$$

بأخذ لو للطرفين

$$لو 7س + 1 = لو 3س - 2$$

$$(س + 1) لو 7 = (س - 2) لو 3$$

$$7س لو 7 + 7 لو 7 = 3س لو 3 - 2 لو 3$$

$$7س لو 7 - 3س لو 3 = 2 لو 3 - 7 لو 7$$

$$س [7س لو 7 - 3س لو 3] = 2 لو 3 - 7 لو 7$$

$$\therefore س = \frac{2 لو 3 - 7 لو 7}{7س لو 7 - 3س لو 3}$$

$$\therefore س \leq 4,89$$

متّسائش تققل الأقراس وانف بئكئب
علي الحاسبية

الفكرة الثالثة حل المعادلات اللوغاريتمية

١ إذا كان $\log_s = \log_{s^m}$

فإن $s = s^m$

٢ عند إيجاد قيم s يجب التعويض في المعادلة

الأصلية لمعرفة إذا كانت تحقق أم لا ؟

٣ لو $s^m = \log_{s^m}$ حيث m عدد زوجي $\neq 0$.

$$m = \log_{s^m} | s |$$

فمثلاً: $\log_{10} (3 -) = 4 = \log_{10} 3$

$$\log_{10} 3 = \log_{10} 3$$

أوجد مجموعة الحل في ح

$$١ \quad ٢ لو س - لو (س + ٢) = ٠$$

الحل

$$لو س^٢ - لو (س + ٢) = ٠$$

$$لو س^٢ = لو (س + ٢)$$

$$\therefore س^٢ = س + ٢$$

$$س^٢ - س - ٢ = ٠$$

$$٠ = (س + ١) (س - ٢)$$

$$س = ٢ \quad س = -١$$

تحقق مرفوض

$$\therefore م. ح = \{ ٢ \}$$

$$٣ = \frac{لو٢}{٢} + \frac{لو٢}{٢} (س - ٢)$$

الحل

$$٣ = \frac{لو٢}{٢} \times (س - ٢)$$

$$٣ \times ٢ = (س - ٢) \times ٢$$

$$\therefore ٦ = ٢س - ٤$$

$$٢س - ٤ = ٦$$

$$٢س = ٦ + ٤$$

$$٢س = ١٠$$

تحقق

لا تحقق

$$\therefore م. ح = \{ ٤ \}$$

$$\text{لو } \frac{2}{3} = (\text{س} + 6) \text{ لو } \frac{2}{3}$$

۳

$$\text{لو } \frac{2}{3} (\text{س} + 6) = \text{لو } \frac{2}{3}$$

$$\text{س} + 6 = \text{س} + 6$$

$$\text{س} - \text{س} = 6 - 6$$

$$0 = (2 + \text{س})(3 - \text{س})$$

$$\text{س} = 3 \quad \text{س} = -2$$

تحقق لا تحقق

$$\therefore \text{م. ح} = \{3\}$$

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

الحل

$$2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \text{بوضع لو س = ص}$$

$$ص = \frac{1}{ص} + 2 \quad \text{بالتضرب } \times ص$$

$$ص^2 = 1 + 2ص$$

$$ص^2 - 2ص - 1 = 0$$

$$ص = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4}}{2}$$

$$ص = \frac{2 \pm \sqrt{8}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}$$

$$ص = 1 + \sqrt{2} \quad \text{لو س = 1}$$

$$\text{ب.م.ح} = \{2\}$$

$$3 = 1 + 2$$

الحل

$$3 = 1 + 2 \quad \text{(لو س = 3)}$$

$$0 = [1 - (لو س)] [3 + (لو س)]$$

$$0 = 1 - (لو س) \quad 0 = 3 + (لو س)$$

$$لو س = 1 \quad لو س = -3$$

$$لو س = 10 \quad لو س = -10$$

$$لو س = 1000$$

$$\text{ب.م.ح} = \{10, 1000\}$$

$$• = \sqrt{6 - س} + (س - ۸) لو$$

$$• = (س - ۸) لو + (س - ۶) لو$$

$$• = (س - ۸) لو + (س - ۶) لو$$

$$• = (س - ۸) (س - ۶) لو$$

$$۱ = ۱ • \quad ۱ = (س - ۸) (س - ۶) \therefore$$

$$• = ۱ - ۸س - ۴۸ - س^۲ + ۶س + ۱$$

$$۱ - ۸س - ۴۸ - س^۲ + ۶س + ۱ = ۰$$

$$• = ۴۹ + ۱۴س - س^۲$$

$$• = (س - ۷)^۲$$

$$س - ۷ = • \quad \therefore س = ۷ \quad \text{تحقق}$$

$$\therefore \text{ح. م.} = \{ ۷ \}$$

بأخذ لو للطرفين

$$\text{لوس (لوس)} = \text{لو} \cdot ۱۰$$

$$\text{لوس لوس} = ۱$$

$$\text{(لوس)}^2 = ۱$$

$$\text{لوس} = \pm ۱$$

$$\text{لوس} = ۱ \quad \text{لوس} = -۱$$

$$\text{س} = ۱۰ \quad \text{س} = ۱۰ \cdot ۱ = ۱۰$$

$$\text{د.م.ح} = \{ ۱۰, ۱۰ \}$$

لويس = لو ٢٥

الحل

لويس / لو ٢ = لو ٢٥ / لو ٤

لويس = (لو ٢٥ * لو ٢) / لو ٤ = (لو ٢٥ * ٢ * لو ٢) / لو ٤

لويس = لو ٥

م.ج = { ٥ }

$$لوس = لوس^2 = لوس^3$$

لذلك :

$$لوس = لوس^2$$

$$\therefore لوس^2 = لوس$$

$$\therefore لوس^2 = لوس \quad \therefore لوس = \pm ٥ \text{ و السالب مرفوض}$$

$$\therefore لوس = ٥$$

$$٢ = \text{لوس}^٣ \times \text{لوس}^٩$$

الحل

$$\text{لوس}^٢ = \text{لوس}^٩ \times \text{لوس}^٣$$

$$٢ \div \text{لوس}^٢ = \text{لوس}^٩ \times \text{لوس}^٣ \div \text{لوس}^٢$$

$$١ = \text{لوس}^٧$$

$$\text{لوس}^٧ = ١$$

$$\text{لوس} = ١$$

$$\text{لوس} = -١$$

$$\text{من} = ٩$$

$$\text{من} = ١٠$$

$$\therefore \text{م.ح} = \left\{ \frac{١}{٩}, \frac{١}{١٠} \right\}$$

١١ إذا كان $s^2 + v^2 = 6$ s v

فأثبت أن :

$$2(s + v) = 2s + 2v + 3$$

$$\Delta s^2 + v^2 = 6$$

$$s^2 + v^2 + 2s + 2v = 6 + 2 + 2 = 10$$

$$\therefore (s + v)^2 = 10 \text{ باخذ لو للطرفين}$$

$$s + v = \sqrt{10} \text{ لو } 8 = 8$$

$$2(s + v) = 2s + 2v + 8$$

$$2(s + v) = 2s + 2v + 3$$

إذا كان :

$$لو (س + ص) = \frac{١}{٢} (لوس + لوص) + لو ٢$$

فأثبت أن : س = ص

بالمضرب $\times ٢$

$$٢ لو (س + ص) = ٢ لوس + ٢ لوص + ٢ لو ٢$$

$$لو (س + ص) = ٢ (لوس + لوص + لو ٢)$$

$$\therefore س^٢ + ص^٢ + ٢سص = ٤سص + ٤لو ٢$$

$$س^٢ + ص^٢ = ٢سص + ٤لو ٢$$

$$س^٢ - ٢سص + ص^٢ = ٤لو ٢$$

$$(س - ص)^٢ = ٤لو ٢ \therefore س = ص$$

٢ بدون استخدام الآلة أوجد قيمة كلاً من :

$$(1) \text{ لو } 2 + \text{ لو } 5$$

$$(2) \text{ لو } 2 + \text{ لو } \frac{1}{2}$$

$$(3) \text{ لو } 15 - \text{ لو } 3$$

$$(4) \text{ لو } 5 \times \text{ لو } 2$$

$$(5) \text{ لو } 54 - 3 \text{ لو } 3 - \text{ لو } 2$$

$$(6) \text{ لو } 15 + \text{ لو } 14 - \text{ لو } 105$$

$$(7) \text{ لو } 5 \times \text{ لو } 5$$

$$(8) \frac{1}{\text{لو } 12} + \frac{1}{\text{لو } 12} + \frac{1}{\text{لو } 12}$$

$$(9) \frac{\text{لو } 729 - \text{لو } 64}{\text{لو } 9 - \text{لو } 4}$$

٣ اوجد لأقرب رقمين عشريين

$$(١) ١١ = ٥س$$

$$(٢) ٩ = ١ + ٧س$$

$$(٣) ٢ - ٣س = ١ + ٧س$$

$$(٤) ١ - ٢س = ٢ + ٥س$$

$$(٥) ١ + ٢س = ٣ - ١١س$$

٤ اوجد في ح مجموعة حل المعادلات :

$$(١) لو (٦ + س) = ٢ لو س$$

$$(٢) ٣ = ٢$$









